

Содержание

Предисловие	6
1. Начисление процентов	9
1.1. Формулы наращения и дисконтирования	9
1.2. Определение срока платежа и уровня процентных ставок	16
1.3. Эквивалентность процентных ставок	16
1.4. Конверсия платежей	17
1.5. Наращение и конверсия валюты	18
1.6. Наращение и инфляция	19
1.7. Финансовые операции со случайными параметрами	20
1.8. Задачи и примеры к разделу 1	24
2. Постоянные финансовые ренты	37
2.1. Наращенная сумма ренты постнумерандо	38
2.2. Современная величина ренты постнумерандо	39
2.3. Определение параметров рент постнумерандо	39
2.4. Наращенная сумма и современная стоимость других видов постоянных рент	40
2.4.1. Рента с простыми процентами	40
2.4.2. Смешанные ренты	41
2.4.3. Рента с периодом, превышающим год	41
2.4.4. Вечная рента	41
2.4.5. Отложенная рента	42
2.4.6. Рента пренумерандо	46
2.4.7. Ренты с платежами в середине периодов	43
2.4.8. Ренты со случайными параметрами	44

2.5.Задачи и примеры к разделу 2	44
3. Переменные потоки платежей	56
3.1.Потоки с разовыми изменениями платежей	56
3.2.Рента с постоянным абсолютным приростом платежей	57
3.3.Рента с постоянным относительным изменением платежей	58
3.4.Непрерывные постоянные потоки платежей	58
3.5.Непрерывные переменные потоки платежей	59
3.6.Задачи и примеры к разделу 3	59
4. Конверсия рент	69
4.1.Изменение параметров рент	69
4.2.Объединение рент	70
4.3.Задачи и примеры к разделу 4	72
5. Планирование погашения долгосрочной задолженности	78
5.1.Формирование погасительного фонда	79
5.2.Погашение основного долга равными суммами	80
5.3.Погашение долга равными срочными уплатами	81
5.4.Погашение долга переменными срочными уплатами	82
5.5.Планы погашения долга в потребительском кредите	83
5.6.Планирование погашения ипотечной ссуды	84
5.7.Льготные займы и кредиты	85
5.8.Задачи и примеры к разделу 5	86
6. Анализ эффективности финансовых операций	94
6.1.Чистый приведенный доход и внутренняя норма доходности фи- нансовой операции. Уравнение баланса финансовой операции	94
6.2.Вычисление эффективности простейших финансовых операций ...	96
6.3.Эффективность потребительского кредита	97
6.4.Эффективность погашения долгосрочных ссуд	98
6.5.Измерение эффективности инвестиционных проектов	99
6.6.Задачи и примеры к разделу 6	101

1. Начисление процентов

Введем обозначения, которые будем использовать в дальнейшем: P — первоначальная сумма долга; S — наращенная сумма ссуды (депозита или других инвестиционных денежных средств); n — срок ссуды или финансового соглашения в годах; I — процентные деньги за весь срок финансового соглашения.

1.1. Формулы наращения и дисконтирования

Под *наращенной суммой* S ссуды, депозита и любого другого вида финансовой операции понимают первоначальную величину P вместе с начисленными на нее процентами I к концу срока финансового соглашения, т.е. $S = P + I$. Расчет процентных денег I зависит от вида применяемой ставки и условий наращения. Для годовой ставки i простых процентов наращенная сумма S за n лет

$$S = P(1 + n \cdot i), \quad (1)$$

где $1 + n \cdot i$ — *множитель наращения*, а годовая ставка i простых процентов (*rate of interest*) определяется как отношение процентных денег, полученных за год, к первоначальной сумме P , т.е.

$$i = \frac{I}{P} = \frac{S - P}{P}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что процентный доход, полученный за год, $I = P \cdot i$, а за n лет он будет в n раз больше, т.е. базой для начисления процентов служит первоначальная величина P . Если срок финансового соглашения n измеряется не в годах, а в днях t , то в (1) в качестве n следует взять $n = \frac{t}{K}$, где

K — так называемая **временная база**, т.е. число дней в году, $K = 360, 365(366)$. Если временная база $K = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней), то говорят, что в формуле (1) используют **обыкновенные**, или **коммерческие** проценты (*ordinary interest*); при использовании действительной продолжительности года, $K = 365(366)$, получают **точные** проценты (*exact interest*).

Подсчет числа дней t пользования ссудой может быть также двояким: точным и приближенным. При точном вычислении t берут фактическое число дней пользования ссудой. День выдачи и день погашения считают за один день. Для подсчета числа дней удобно пользоваться табл. 1, в которой приведены порядковые номера дней в году, при этом из порядкового номера дня погашения ссуды вычитают порядковый номер дня получения ссуды. При приближенном подсчете t считают, что в каждом полном месяце содержится по 30 дней. День получения и день погашения считают за один день.

Из возможных четырех вариантов наращения процентов на практике используют три:

а) **точные проценты с точным числом дней ссуды**. Этот вариант ($K = 365(366)$) дает самые точные результаты;

б) **обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды**. Этот метод ($K = 360$), иногда называемый **банковским**, распространен в ссудных операциях коммерческих банков. Он дает несколько больший результат, чем предыдущий метод;

в) **обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды**. Такой метод ($K = 360$) применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах.

Таблица 1

Порядковые номера дат в году

Дни	Месяцы											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Разрешая формулу (1) относительно P , получаем современное значение (*present value*) наращенной суммы S :

$$P = S(1 + n \cdot i)^{-1}, \quad (3)$$

где $(1 + n \cdot i)^{-1}$ — **ДИСКОНТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ** по ставке простых процентов.

Понятие современной величины, играющее фундаментальную роль в финансовых вычислениях, можно обобщить и вычислить современное значение на промежуточный момент n_1 , $0 < n_1 < n$:

$$P = S(1 + (n - n_1) \cdot i)^{-1}. \quad (4)$$

Формулу (1) можно обобщить на случай, когда ставка процентов i меняется кусочно-постоянным образом от одного интервала к другому: на интервале длительностью n_k действует ставка простых процентов i_k , $k = \overline{1, m}$; $n = \sum_{k=1}^m n_k$. В этом случае

$$S = P \left(1 + \sum_{k=1}^m n_k \cdot i_k \right). \quad (5)$$

Разрешая формулу (5) относительно P , можно определить современное значение наращенной суммы S по переменной ставке простых процентов.

Начисление процентов на первоначальную величину P не является единственно возможным способом начисления процентов. Если за базу для начисления процентов взять не P , а наращенную сумму S , то приходим к определению *годовой банковской учетной ставки*:

$$d = \frac{I}{S} = \frac{S - P}{S}, \quad (6)$$

где $I = S - P$ — процентные деньги, полученные за год.

Из (6) вытекает, что процентные деньги за год $I = d \cdot S$, а за n лет они будут в n раз больше: $I = S - P = n d S$, т.е. базой для начисления процентов служит наращенная сумма S . Из последней формулы получаем, что современная величина S , определенная в момент времени n , в начальный момент времени составляет значение

$$P = S(1 - n \cdot d), \quad (7)$$

где $1 - n \cdot d$ — *дисконтный множитель по банковской учетной ставке d* .

Формулу (7) иногда называют формулой для определения величины ссуды, выдаваемой с *удержанием процентов вперед*. Формула (7) используется при *учете векселей*, причем $n = \frac{t}{K}$, где t — число дней от момента учета до даты погашения векселя, а временная база K , как правило, равна 360 дней. Нарращение по банковской учетной ставке d , как следует из (7), вычисляем по формуле

$$S = P(1 - n \cdot d)^{-1}, \quad (8)$$

где $(1 - n \cdot d)^{-1}$ — *множитель наращения по банковской учетной ставке*.

Формулы (7), (8) имеют смысл для $n < \frac{1}{d}$. Дисконтирование S можно проводить по переменной годовой банковской учетной ставке

$$P = S \left(1 - \sum_{k=1}^m n_k \cdot d_k \right), \quad (9)$$

где d_k — банковская учетная ставка, действующая на интервале длительностью n_k , $n = \sum_{k=1}^m n_k$.

Годовые ставки процентов i и d называют *ставками простых* процентов, поскольку соответствующие процессы наращения и дисконтирования по этим ставкам развиваются линейно.

В долгосрочных финансово-кредитных операциях ($n > 1$), если проценты не выплачиваются сразу же после их начисления, а присоединяются к сумме долга (капитализируются), как правило, применяют сложные проценты (*compound interest*). База для начисления сложных годовых процентов увеличивается в конце каждого года, и процесс увеличения суммы долга обычно происходит ускоренно.

Нарращенная сумма долга по годовой ставке сложных процентов за n лет определяется формулой

$$S = P(1 + i)^n, \quad (10)$$

где $(1 + i)^n$ — *множитель наращения по годовой ставке сложных процентов*.

Из (10) вытекает, что современная величина

$$P = S(1+i)^{-n}, \quad (11)$$

где $(1+i)^{-n}$ — **дисконтный множитель по годовой ставке сложных процентов**.

Если ставка сложных процентов меняется от периода к периоду (на периоде длительностью n_k действует ставка сложных процентов i_k), наращенная сумма

$$S = P \cdot \prod_{k=1}^m (1+i_k)^{n_k}. \quad (12)$$

Разрешая формулу (12) относительно P , можно найти современную величину S по **плавающей ставке** сложных процентов.

Если срок n для начисления сложных процентов не является целым числом, т.е. $n = a + b$, где a — целое число лет, а b — дробная часть года, $0 < b < 1$, то для вычисления наращенной суммы можно использовать два метода. Согласно **общему**, методу расчет ведется непосредственно по формуле (10). По **смешанному** методу за целое число лет начисляют сложные проценты, а за дробную часть года — простые, т.е.

$$S_1 = P(1+i)^a(1+b \cdot i). \quad (13)$$

Смешанный метод дает большее значение наращенной суммы, чем общий метод, $S_1 > S$.

В современных условиях проценты могут капитализироваться по сложной годовой ставке j не один, а m раз в году, через равные промежутки времени $1/m$. В таком случае для вычисления наращенной суммы можно использовать формулу (10), в которой под ставкой i следует понимать ставку процентов за период j/m , а n будет обозначать число $n \cdot m$ таких периодов, т.е.

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}, \quad (14)$$

где $\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}$ — **множитель наращения по номинальной ставке j с m -разовым начислением процентов в году**.

Из (14) получаем, что современная величина S равна

$$P = S \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-mn}, \quad (15)$$

где $\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-mn}$ — **ДИСКОНТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ ПО НОМИНАЛЬНОЙ СТАВКЕ j** .

Если устремить m к бесконечности, то промежуток $1/m$ между начислениями процентов будет стягиваться к нулю, и проценты будут начисляться непрерывно. Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, номинальную ставку j обозначим через δ . Ставку δ называют **непрерывной ставкой процентов** или **силой роста**. В результате предельного перехода в (14), (15) получаем

$$S = P \cdot e^{\delta \cdot n}, \quad P = S \cdot e^{-\delta \cdot n},$$

где $e^{\delta \cdot n}$, $e^{-\delta \cdot n}$ соответственно **множители наращения и дисконтирования по годовой постоянной ставке непрерывных процентов δ** .

Если сила роста изменяется во времени, т.е. $\delta = \delta(t)$, то наращенная сумма и современная стоимость определяются как

$$S = P \cdot e^{\int_0^n \delta(t) dt}, \quad P = S \cdot e^{-\int_0^n \delta(t) dt}. \quad (16)$$

По аналогии с номинальной ставкой сложных процентов вводится **номинальная учетная ставка f** с m -разовым дисконтированием в году, т.е. каждый раз по ставке f/m . В таком случае

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m} \right)^{mn}, \quad S = P \left(1 - \frac{f}{m} \right)^{-mn}, \quad (17)$$

где $\left(1 - \frac{f}{m} \right)^{mn}$, $\left(1 - \frac{f}{m} \right)^{-mn}$ — соответственно, **ДИСКОНТНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ И МНОЖИТЕЛЬ НАРАЩЕНИЯ**.

1.2. Определение срока платежа и уровня процентных ставок

При разработке условий финансовых операций часто сталкиваются с необходимостью определения одного из параметров сделки: продолжительности ссуды, или уровня процентной ставки при условии, что остальные параметры фиксированы. Подобные задачи легко решаются, если формулы наращивания разрешить относительно интересующего нас параметра. Так, исходя из формулы (10), годовая ставка сложных процентов $i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$.

1.3. Эквивалентность процентных ставок

В финансовых операциях могут участвовать различные виды процентных ставок. Одну процентную ставку можно эквивалентным образом выразить через другую ставку процентов. Такое эквивалентное преобразование производится на основе равенства соответствующих множителей наращивания. Так, номинальной ставке j с m -разовым начислением процентов в году соответствует эквивалентная годовая ставка простых процентов

$$i = \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} - 1 \right].$$

Если за периоды n_1, n_2, \dots, n_m начисляются простые проценты по ставкам i_1, i_2, \dots, i_m , тогда за весь срок наращивания $n = \sum_{s=1}^m n_s$ эквивалентная **средняя ставка простых процентов** равна

$$i_0 = \frac{\sum_{s=1}^m n_s \cdot i_s}{n}. \quad (18)$$

Аналогичным образом получим **среднюю учетную ставку**

$$d_0 = \frac{\sum_{s=1}^m n_s \cdot d_s}{n} \quad (19)$$

и *среднюю ставку сложных процентов*

$$i_0 = \left(\prod_{s=1}^m (1 + i_s)^{n_s} \right)^{1/n} - 1. \quad (20)$$

1.4. Конверсия платежей

В финансовой практике часто возникают случаи, когда одно финансовое обязательство следует заменить другим. Такая замена осуществляется на основе принципа *финансовой эквивалентности обязательств*. Эквивалентными считаются такие платежи, которые будучи “приведенными” к некоторой *базисной дате* по ставке процентов, удовлетворяющей обе стороны, оказываются равными. Исходя из этого принципа, получают *уравнение эквивалентности* (*equation of value*), в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к базисной дате, равна сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

Наиболее простой вид принимает уравнение эквивалентности при *консолидации* платежей, когда платежи S_1, S_2, \dots, S_m со сроками оплаты соответственно n_1, n_2, \dots, n_m заменяются одним в сумме S_0 и сроком оплаты n_0 . Здесь возможны две постановки задачи: если задается срок n_0 , то находится сумма S_0 и наоборот. При заданном n_0 , если консолидация производится по ставке простых процентов i , размер консолидированного платежа

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j i) + \sum_k S_k (1 + t_k i)^{-1}, \quad (21)$$

где S_j — платежи со сроками оплаты $n_j < n_0$, $t_j = n_0 - n_j$; S_k — платежи со сроками оплаты $n_k > n_0$, $t_k = n_k - n_0$.

Формула (21) получена из уравнения эквивалентности, в котором в качестве базисной даты выбрано n_0 . Формулы, аналогичные формуле (21),

можно записать и для случаев, когда консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки и ставки сложных процентов (надо учесть, что в этих случаях в формуле (21) изменятся множители наращения и дисконтные множители).

Если требуется определить время n_0 оплаты консолидированного платежа S_0 , составляем уравнение эквивалентности, выбрав в качестве базисной даты начало отсчета. Разрешив уравнение эквивалентности относительно n_0 , для ставки простых процентов i (ставки “приведения”) получаем

$$n_0 = \frac{1}{i} \left(\frac{S_0}{Q} - 1 \right), \quad Q = \sum_j S_j (1 + n_j i)^{-1}. \quad (22)$$

Очевидно, что формула (22) имеет смысл только для $S_0 \geq Q$, т.е. если размер консолидированного платежа не будет меньше “барьерного” значения Q . Таким же образом определяют время оплаты, если консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки и ставки сложных процентов.

1.5. Наращение и конверсия валюты

Если имеются свободные денежные средства в рублях или СКВ, то можно нарастить их, положив на депозит. При возможности свободного обмена рублевых средств на СКВ и наоборот это можно сделать двояким образом: непосредственно положить денежные средства на депозит или положить их на депозит, обменяв на другую валюту. Возникает вопрос, какой из этих двух возможных способов обеспечит больший прирост денежной массы. Рассмотрим эту задачу без учета инфляции для варианта СКВ \rightarrow Руб. \rightarrow Руб. \rightarrow СКВ, в случае, когда наращение идет по ставке простых процентов [1]. Вариант Руб. \rightarrow СКВ \rightarrow СКВ \rightarrow Руб. и наращение по сложным процентам можно рассмотреть аналогично.

Введем обозначения: n — срок депозита; K_0 — курс обмена в начале операции (курс СКВ в рублях); K_1 — курс обмена в конце операции; i — ставка простых процентов для рублевой массы; j — ставка простых процентов для конкретного вида СКВ.

При двойном конвертировании (обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и конвертирование в исходную валюту) наращенная сумма в валюте будет равна

$$S = PK_0(1 + n \cdot i) \frac{1}{K_1}.$$

При прямом помещении на депозит получаем $S_1 = P(1 + nj)$. Найдем “барьерное” значение \bar{K}_1 обменного курса K_1 , при котором $S = S_1$, т.е. для обменного курса \bar{K}_1 оба способа наращения эквивалентны:

$$\bar{K}_1 = \frac{K_0(1 + n \cdot i)}{1 + n \cdot j}.$$

Если ожидаемый курс обмена $K_1 < \bar{K}_1$, то двойное конвертирование валюты выгоднее, чем прямое помещение валюты на депозит. Для $K_1 > \bar{K}_1$ ситуация будет прямо противоположной. Курс обмена заранее неизвестен, однако его можно спрогнозировать, опираясь на динамику обменного курса в предыдущие периоды [11].

1.6. Наращение и инфляция

Наращенная сумма ссуды, депозита с учетом инфляции определяется как $C = \frac{S}{J_p}$, где J_p — **индекс цен**, а S — наращенная сумма, измеренная по номиналу. Так как инфляция является цепным процессом, т.е. цены в период t повышаются на h_t процентов относительно уровня, сложившегося в периоде $t-1$, то индекс цен за n таких периодов равен **произведению** цепных индексов цен:

$$J_p = \prod_{t=1}^n (1 + h_t),$$

где темп инфляции h_t измеряется в виде десятичного числа.

1.7. Финансовые операции со случайными параметрами

Величина наращенной суммы является функцией трех параметров: первоначальной суммы, ставки процентов и продолжительности ссуды. Если речь идет о конкретной операции, которую планируется осуществить в будущем, то значение параметров либо части из них бывает точно неизвестно. В таком случае можно считать, что эти не определенные точно параметры являются случайными величинами с заданным либо спрогнозированным законом распределения вероятностей. Тогда наращенная сумма S будет также случайной величиной.

Финансиста или экономиста прежде всего будет интересовать среднее (ожидаемое) значение величины S , т.е. ее математическое ожидание $E\{S\}$. Важной характеристикой S является также ее дисперсия $D\{S\}$ или среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$. Чем меньше σ , тем более предсказуемым, менее рискованным является значение наращенной суммы. В финансовой литературе [9] значение σ часто принимают за меру **риска** финансовой операции.

Наиболее полной вероятностной характеристикой наращенной суммы S является ее функция распределения вероятностей. Если удастся аналитически вычислить функцию распределения S , то через нее можно легко подсчитать вероятность попадания S в заданный интервал и другие числовые характеристики, такие как $E\{S\}$ и σ .

Если функцию распределения S не удастся вычислить, то в этом случае для оценки числовых характеристик S , как правило, используют методы ста-

статистического моделирования [10, 11] и пакеты прикладных программ для моделирования случайных элементов, например ППП СТАТМОД [11].

Приведем некоторые результаты для случая, когда наращенная сумма зависит от случайной ставки процентов.

Для годовой случайной ставки простых процентов i , принимающей на интервале $[0, n]$ заранее неизвестное значение, функция распределения наращенной суммы (1) имеет вид [13]

$$F_S(x) = F_i\left(\frac{x-p}{p \cdot n}\right), \quad (23)$$

где $F_i(x)$ — функция распределения ставки процентов i .

Для годовой номинальной случайной ставки процентов, принимающей постоянное значение на интервале $[0, n]$ с m -разовым начислением процентов в году функция распределения наращенной суммы

$$F_S(x) = F_j\left(m\left(\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right)\right), \quad (24)$$

где $F_j(x)$ — функция распределения номинальной ставки процентов j .

Используя формулы (23), (24), можно подсчитать все числовые характеристики наращенной суммы S .

Наращенная сумма для переменной ставки простых процентов определяется формулой (5). Будем считать, что ставки процентов i_1, i_2, \dots, i_m являются независимыми в совокупности случайными величинами. Если i_1, i_2, \dots, i_m — дискретные случайные величины, то и наращенная сумма S будет также дискретной случайной величиной и вычисление числовых характеристик S не представляет принципиальной трудности. Вычисление числовых характеристик S для дискретных случайных ставок простых процентов i_1, i_2, \dots, i_m реализовано в ППП ФЭР.

Если ставки простых процентов i_1, i_2, \dots, i_m являются независимыми в совокупности абсолютно-непрерывными случайными величинами, можно найти плотность распределения наращенной суммы S , последовательно при-

меня формулу свертки для плотностей [10,11]. В частности, для двух интервалов постоянства ($m = 2$) значений ставок простых процентов, распределенных по равномерному закону, т.е. для $i_1 \in R(a_1, b_1)$, $i_2 \in R(a_2, b_2)$, i_1, i_2 — независимые случайные величины, плотность распределения S имеет “трапецеидальный” вид [13]:

$$P_s(x) = \begin{cases} 0, & x \leq t_1, \\ \frac{x - t_1}{d \cdot P^2}, & t_1 \leq x \leq t_2, \\ \frac{m_1 - n_1 \cdot a_1 - n_2 \cdot a_2}{d \cdot P}, & t_2 \leq x \leq t_3, \\ \frac{t_4 - x}{d \cdot P^2}, & t_3 \leq x \leq t_4, \\ 0, & x \geq t_4, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$m_1 = \min\{n_1 a_1 + n_2 b_2, n_1 b_1 + n_2 a_2\}; \quad d = n_1 \cdot n_2 (b_1 - a_1)(b_2 - a_2); \quad t_1 = P(1 + n_1 a_1 + n_2 a_2); \\ t_2 = P(1 + m_1); \quad t_3 = P(1 + \max\{n_1 a_1 + n_2 b_2, n_1 b_1 + n_2 a_2\}); \quad t_4 = P(1 + n_1 b_1 + n_2 b_2).$$

Используя формулу (25), легко можно подсчитать вероятность попадания S в заданный интервал $[S_1, S_2] \subset [t_1, t_4]$, среднее значение S и риск для S .

Рассмотрим теперь случай, когда среди ставок простых процентов i_1, i_2, \dots, i_m , определенных соответственно на интервалах длительностью n_1, n_2, \dots, n_m , одна часть ставок процентов описывается абсолютно непрерывными распределениями, а другая — дискретными распределениями и ставки i_1, i_2, \dots, i_m — независимые в совокупности случайные величины. Последовательно используя формулу свертки для плотностей, линейную комбинацию абсолютно-непрерывных случайных величин сведем к одной абсолютно-непрерывной случайной величине. А так как линейная комбинация дискретных, случайных величин является дискретной, случайной величиной, то, не ограничивая общности рассуждений, можно рассмотреть случай двух интервалов постоянства ставок процентов i_1, i_2 . Для определенности рассуждений предположим, что i_1 имеет плотность распределения $p_{i_1}(x)$, а i_2 — дискретная, случайная величина, имеющая следующее распределение:

i_2	r_1	r_2	\dots	r_s
P	p_1	p_2	\dots	p_s

Используя формулу полной вероятности, получаем, что функция распределения наращенной суммы имеет вид [13]

$$F_s(x) = \sum_{j=1}^s p_j F_{i_j} \left(\frac{x - P(1 + n_2 \cdot r_j)}{P \cdot n_1} \right). \quad (26)$$

Формула (26) позволяет легко вычислить вероятность попадания наращенной суммы в заданный интервал $[S_1, S_2]$: $P(S_1 \leq S \leq S_2) = F_s(S_2) - F_s(S_1)$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ставки простых процентов i_1, i_2, \dots, i_m , определенные на интервалах длительностью n_1, n_2, \dots, n_m , связаны **цепной марковской зависимостью**. Пусть интервал $[0, n]$ разбит точками $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1} = n$ на подинтервалы длиной $n_j = t_{j+1} - t_j, j = \overline{1, m}$. На интервале $[0, n]$ задан **тренд** $f(t)$, определяющий общую тенденцию изменения процентных ставок. Ставка простых процентов i_j , принимающая постоянное значение на интервале $[t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{1, m}$, складывается из значения $f(t_j)$ тренда в начале интервала и **маржи** ε_{ξ_j} , т.е. $i_j = f(t_j) + \varepsilon_{\xi_j}$, где $\xi_j, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ – однородная цепь Маркова с N состояниями $\{1, 2, \dots, N\}$, начальным распределением вероятностей

$$P\{\xi_1 = \lambda\} = \pi_\lambda \geq 0, \lambda = \overline{1, N}, \sum_{\lambda=1}^N \pi_\lambda = 1$$

и матрицей вероятностей одношаговых переходов

$$P = (p_{ks}), P\{\xi_{j+1} = s | \xi_j = k\} = p_{ks}, \sum_{s=1}^N p_{ks} = 1, k = \overline{1, N},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ — заданные значения маржи.

Среднее значение наращенной суммы (5) равно [14]:

$$E\{S\} = \sum_{\xi_1=1}^N \sum_{\xi_2=1}^N \Lambda \sum_{\xi_m=1}^N P(1 + n_1 i_{\xi_1} + n_2 i_{\xi_2} + \Lambda + n_m i_{\xi_m}) \pi_{\xi_1} \cdot p_{\xi_1, \xi_2} \cdot \Lambda \cdot p_{\xi_{m-1}, \xi_m} . \quad (27)$$

Можно также вычислить дисперсию S и вероятность попадания S в заданный интервал.

Для ставок сложных процентов i_1, i_2, \dots, i_m , связанных цепной марковской зависимостью, среднее значение наращенной суммы (12) определяется формулой, аналогичной формуле (27), если в ней множитель $(1 + n_1 i_{\xi_1} + n_2 i_{\xi_2} + \Lambda + n_m i_{\xi_m})$ заменить на множитель $(1 + i_{\xi_1})^{n_1} \cdot \Lambda \cdot (1 + i_{\xi_m})^{n_m}$.

Вычисление числовых характеристик S для ставок простых и сложных процентов, связанных цепной зависимостью Маркова, реализовано в ППП ФЭР.

Естественно, здесь рассмотрены лишь простейшие постановки задач со случайными параметрами, возникающих в финансовой математике.

1.8. Задачи и примеры к разделу 1

1.1. Ссуда в размере 125 тыс. \$ выдана 16.01 по 10.11 включительно, под 5,75% простых годовых, год високосный. На сколько больше будет наращенная сумма ссуды при использовании **обыкновенных** процентов по сравнению с наращенной суммой при использовании **точных** процентов, если продолжительность пользования ссудой вычисляется точно?

1.2. Ссуда в 225 тыс. \$, с удержанием процентов вперед, выдана 18.01 по 19.08 включительно, под 8,25 обыкновенных простых годовых процентов, год не високосный. Какую сумму на руки получит должник 18.01?

1.3. Владелец векселя на 175,5 тыс. \$ с датой погашения 30.10 решил учесть его в банке 17.05. Банк А согласен учесть вексель по ставке 8,5%, а банк В — по ставке 8,4% годовых. Какой банк предпочтет держатель векселя и почему? Какую сумму условно потеряет векселедержатель, если он выберет неправильную тактику? Временная база $K = 360$ дней.

1.4. На годовой депозит можно положить денежные средства под 10% годовых, а на полугодовой — под 9,75 % годовых. Что выгоднее, положить свободные денежные средства на годовой депозит или два раза воспользоваться полугодовым депозитом, не снимая проценты?

1.5. На сумму в 2255\$ в течение 8 месяцев начисляются простые проценты. Базовая ставка 5% годовых повышается каждый месяц, начиная со второго, на 0,5%, временная база $K = 360$. Чему будут равны наращенная сумма и средняя процентная ставка?

1.6. Какую сумму следует положить на депозит 18.03 под 8,75 простых годовых процентов, чтобы 14.11 накопить 1800\$, если используются: а) точные проценты, б) используются обыкновенные проценты? ($K = 365$).

1.7. Какая должна быть ставка простых годовых процентов для того, чтобы сумма долга, взятого 11.04, увеличилась бы на 25% к 17.12, если используются: а) точные проценты; б) обыкновенные проценты? ($K = 365$).

1.8. По годовому депозиту назначена ставка 12% годовых. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит, чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бы к такому же результату, что и при использовании годового депозита? ($K = 360$).

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.9. Кредит в сумме 100 тыс. \$ предоставлен 15.01 под 9,5 простых годовых процентов. С какого момента долг превысит 105 тыс. \$, если начисляются: а) точные проценты, $K = 365$; б) обыкновенные проценты?

1.10. Кредит в сумме 120 тыс. \$ выдан 10.01 по 16.09 включительно, под 10,5% годовых (обыкновенные проценты, год не високосный). В счет погашения долга 21.05 уплачено 80 тыс. \$. Какую сумму нужно вернуть 16.09?

Указание: использовать правило *торговца*, т.е. сумму в 80 тыс. \$ “вывести” на дату 16.09.

1.11. На первоначальную сумму в 580\$ в течение 2,5 лет начисляются проценты по годовой ставке 8,75%. На сколько больше будет наращенная сумма, вычисленная по смешанному методу, чем по общему методу, если $K = 360$ дней?

1.12. Через сколько лет первоначальная сумма увеличится в 1000 раз, если на нее начисляются сложные годовые проценты по ставке 12% при: а) начислении процентов в конце года; б) ежемесячном начислении процентов?

1.13. Запас древесины лесного массива в данный момент, оценивается в 1 млн м³. Каков будет запас древесины через 50 лет при годовой силе роста 10%?

1.14. На первоначальную сумму в течение 5 лет начисляются сложные годовые проценты по ставке 12% раз в конце года. Во сколько раз вырастет наращенная сумма, если проценты будут начисляться ежемесячно?

1.15. На пять лет под 8,5 сложных годовых процентов выдана ссуда в 1000\$. В счет погашения долга в конце второго года внесено 1100\$, которые пошли на уплату процентов, накопленных к этому сроку, а оставшая сумма — на погашение основного долга, т.е. использовался *актуарный метод* погашения задолженности. Какую сумму следует уплатить в конце пятого года, чтобы полностью погасить задолженность?

1.16. Кредит выдан на 5 лет под 8% годовых, начисление процентов в конце года. Какую номинальную годовую ставку процентов необходимо назначить, чтобы получить к концу пятого года ту же наращенную сумму при поквартальном начислении процентов? Будет ли зависеть эта номинальная ставка от срока ссуды?

1.17. На сумму долга в течение 2 лет начисляются сложные проценты по ставке 8,7% годовых. Сколько раз в году нужно начислять проценты по той же ставке, чтобы за 2 года наращенная сумма выросла бы не менее чем на 18,75%?

1.18. Кредит в сумме 2500\$ выдан на 8 лет. Сложная ставка годовых процентов менялась от периода к периоду: на протяжении первых 3 лет действовала ставка 7,5%, в следующие 3 года — 8%, в последнем периоде — 8,2%. Какую сумму нужно вернуть в конце восьмого года? Чему равна средняя ставка сложных процентов?

1.19. Чему будет равна годовая ставка сложных процентов, эквивалентная ставке непрерывных процентов из задачи 1.13?

1.20. Министр финансов Российской Федерации Б. Федоров, выступая в Думе в январе 1995 г., отметил, что месячный темп инфляции в России составляет 5%, и предупредил, что если такой темп инфляции сохранится, то в год он составит около 80%. Оппоненты обвинили Б. Федорова в том, что он “плохо” считает: говорит о 80%, а не о 60%. Кто же прав? Чему же точно равен темп инфляции за год при постоянном месячном темпе в 5%?

1.21. Остров Манхэттен был “куплен” в 1624 г. у индейского вождя за 24\$ ([1], с. 37). Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась в 40 млрд \$. При какой ставке годовых процентов возможен такой рост?

1.22. На годовом рублевом депозите ставка процентов составляет 45% годовых. Месячный темп инфляции в первом полугодии был постоянен и составил 4,7% в месяц, во втором полугодии — 5% в месяц. Во сколько раз возрастет реальная наращенная сумма депозита за год?

1.23. Ожидается, что в следующие 3 месяца темп инфляции составит соответственно 18, 20 и 21% за каждый месяц. Какую годовую ставку простых процентов следует назначить на трехмесячный кредит, чтобы реальный прирост денежной массы составил 5% годовых при $K = 360$?

1.24. Месячные темпы роста инфляции за предшествующие полгода характеризуются следующим рядом: 3,05, 3,07, 3,24, 3,29, 3,42, 3,53%, т.е. отмечался устойчивый рост инфляции. Исходя из линейного прогноза месячных темпов инфляции, укажите годовую ставку простых процентов, обеспечивающую реальный рост долга по трехмесячному кредиту в 3,5% годовых.

1.25. Ставка процентов по трехмесячному депозиту составляет 36% годовых, $K = 360$. Ожидается, что месячные темпы инфляции составят соответственно 3,1, 3,3 и 3,4%. Какая реальная доходность, в виде годовой ставки простых процентов, инвестирования средств?

1.26. На депозит на 3 месяца положили 1 млн руб. под 36% годовых, $K = 360$. Проценты простые. Есть основания считать, что с равной вероятностью темп инфляции за это время составит от 2 до 4%. Чему будет равно среднее ожидаемое значение реальной наращенной суммы депозита?

1.27. Исходя из условий предыдущей задачи подсчитайте вероятность попадания реальной наращенной суммы в интервал от 1049000 руб. до 1065000 руб.

1.28. Планируется положить на трехмесячный депозит 10 млн руб. В данный момент курс покупки доллара составляет 30 110 рублей. За предыдущие 11 месяцев курс доллара рос и составил следующий временной ряд (в рублях): 15500, 2100, 22800, 24850, 26730, 26980, 27180, 27430, 27880, 28800. Ставка процентов на рублевом депозите — 50%, а на долларовом — 5% годовых. Основываясь на степенном прогнозе [11] курса доллара, решить вопрос, что выгоднее: поместить денежные средства на рублевый или долларовый депозит с двойной конверсией? Чему будет равна наращенная сумма депозита при наилучшем варианте помещения денежных средств?

1.29. На первоначальную сумму денег в течение n лет начисляются сложные проценты по годовой ставке 10%. Насколько процентов возрастет сумма при переходе к ежедневной капитализации процентов ($K = 365$) для: а) $n = 4$; б) $n = 8$?

1.30. На начальную сумму в 1000\$ в течение 4 лет начисляются каждые полгода сложные проценты по номинальной ставке 5%. На сколько увеличится или уменьшится наращенная сумма, если номинальная ставка и число периодов капитализации процентов возрастут вдвое?

1.31. Начальное значение силы роста равно 8%. Ежегодный абсолютный прирост составлял 2% в течение 5 лет, затем в течение последующих 5 лет происходило линейное падение силы роста на 1% в год. Чему будет равен множитель наращивания за 10 лет?

1.32. Четыре платежа: 10,5 тыс., 12 тыс., 8,4 тыс. и 7,25 тыс. \$ со сроками оплаты соответственно 3.03; 8.04; 17.06; 13.09 (год не високосный) решено заменить одним платежом, выплачиваемым 15.08. При такой замене стороны согласились использовать годовую ставку простых процентов – 6,5%. В качестве базовой даты можно выбрать любую из дат оплаты платежей. Какую базовую дату следует выбрать, чтобы консолидированный платеж: а) был минимальным; б) был максимальным? Определите величину консолидированного платежа для каждого из вариантов.

1.33. Четыре платежа из условий предыдущей задачи решено консолидировать в один платеж S , выплачиваемый 1.03. При консолидации используется ставка 9,25 простых годовых процентов. Базовая дата – 1.03; временная база $K = 365$ дней. Какова величина S ?

1.34. По условиям предыдущей задачи консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки 9,25% годовых, $K = 365$ дней. Какова величина S ?

1.35. Ссуда в размере 100 тыс. \$ выдана на 90 дней под 8,5% точных простых годовых процентов, $K = 366$ дней. Однако она не была возвращена в намеченный срок, а была погашена спустя 13 дней, не считая даты погашения. Какую сумму следует вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись точные простые проценты по ставке 10 % годовых?

1.36. При сохранении условий задачи 1.32 четыре платежа решено погасить одним платежом в сумме 38,5 тыс. \$. Консолидация производится на основе годовой ставки в 6,5 простых процентов. Определите дату уплаты консолидированного платежа.

1.37. Имеются три векселя с датами погашения, указанными в скобках, на сумму 12,5 тыс. (8.04); 7,25 тыс. (15.07) и 10,3 тыс. \$ (23.11). Решено учесть их в банке 3.03. Банк учитывает векселя по ставке 8,2% годовых со сроками до погашения от 250 до 360 дней, по ставке 7,8% со сроками до погашения от 130 до 249 дней и по ставке 6% годовых для векселей со сроками погашения от 30 до 129 дней. Какую сумму получит владелец векселей, если учтет их одновременно в банке, $K = 360$?

1.38. Три векселя (условия их погашения приведены в предыдущей задаче) решено заменить одним векселем на основе банковской учетной ставки 7% годовых с оплатой 3.03. Какую сумму следует поставить в новом векселе, если базовой для расчета выбрана дата 3.03?

1.39. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче 1.37) решено заменить одним векселем в сумме 31 тыс. \$ на основе банковской учетной ставки 8,2% годовых, $K = 360$. Укажите дату погашения этого векселя, если год не високосный.

1.40. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче 1.37) решено заменить одним векселем, в котором необходимо указать целое число тысяч долларов. Замена производится на основе банковской учетной ставки 8,2% годовых, $K = 360$. Каково минимальное допустимое значение этой суммы, при которой возможна подобная замена? Укажите дату погашения векселя с найденным значением минимально допустимой суммы, если год не високосный.

1.41. Платежи в сумме 8,25 тыс., 10,05 тыс. и 25,45 тыс. \$ со сроками оплаты соответственно через 2; 3,5 и 4 года решили заменить одним платежом в сумме S , выплачиваемым через 4,5 года. Подобная замена производится по сложной ставке 8,75% годовых, $K = 360$. Чему равна сумма S ? Зависит ли сумма S от выбора базовой даты?

1.42. Платежи из предыдущей задачи решили заменить одним платежом в размере 44 тыс. \$ на основе сложной ставки 8,75% годовых. Через сколько лет должен быть оплачен этот консолидированный платеж?

1.43. Три платежа, условия погашения которых указаны в задаче 1.41, должны быть заменены одним платежом, содержащим целое число тысяч долларов. Замена производится на основе сложной ставки 8,75% годовых. Чему равна минимальная допустимая сумма платежа и через какой срок он должен быть оплачен?

1.44. Имеется обязательство оплатить 16.03 $S_1 = 8,4$ тыс. \$, 5.06 $S_2 = 16,3$ тыс. \$ и 20.11 $S_3 = 7,2$ тыс. \$. Решено на основе простой ставки процентов 6,5 годовых ($K = 365$) изменить порядок оплаты: 30% от $S_1 + S_2 + S_3$ выплачивается 15.07, а остальная задолженность R гасится 30.11. Определить величину R для случая, когда: а) в качестве базовой даты берется 15.07; б) базовая дата — 30.11.

1.45. По финансовому обязательству необходимо оплатить 120 тыс. \$ через 4,5 года. На основе сложной ставки процентов 9,5 годовых решено изменить порядок оплат: задолженность погашается тремя равными частями S_0 через год, два и три года. Чему равно S_0 ?

1.46. Фирма планирует через месяц положить в банк на депозит часть своих доходов на 6 месяцев под 10 простых годовых процентов. Предполагается, что удастся положить в банк некоторую сумму от 100 до 200 тыс. \$. Требуется определить вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [150 тыс. \$, 210 тыс. \$], S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$ для следующих двух ситуаций: а) первоначальная сумма P имеет равномерное распределение в интервале [150 тыс., 210 тыс.]; б) сумма P распределена по “треугольному” распределению в интервале [150 тыс., 210 тыс.], т.е. максимальное значение плотности распределения вероятностей соответствует середине интервала, на концах интервала ее значение равно нулю.

1.47. Фирма планирует положить через месяц на депозит 100 тыс. \$ на полгода. Ориентируясь на то, что в данный момент на такую сумму денег начисляют 10 простых годовых процентов, можно предположить, что ставка процентов будет находиться в интервале $[9,9\%, 10,1\%]$. Вычислить вероятность попадания наращенной суммы S в интервал $[104,95 \text{ тыс. \$}, 105 \text{ тыс. \$}]$, S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$, σ для следующих двух ситуаций: а) ставка процентов равномерно распределена в интервале $[9,9\%, 10,1\%]$; б) ставка процентов распределена по “треугольному” распределению в интервале $[9,9\%, 10,1\%]$.

1.48. Некто имеет 900\$. Что для него выгоднее, положить эту сумму в банк на год под 8% годовых или купить за 900\$ вексель с номиналом 950\$ и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

1.49. Вексель был куплен за 850\$. Через 3 месяца он был продан за 920\$. Какова доходность этой операции купли-продажи, измеренная в виде годовой ставки простых процентов, $K = 360$?

1.50. Финансовый директор фирмы планирует через месяц положить на депозит в банк 50 тыс. либо 100 тыс. \$ на полгода. Годовая ставка простых процентов i зависит от размера суммы. Совместное распределение начальной суммы P и ставки процентов i приведено в табл. 1.1.

Таблица 1.1

P , тыс.\$	i , %	Вероятность
50	2	0,1
	3	0,1
	4	0,4
100	4	0,005
	6	0,3
	8	0,05

Определите вероятность попадания наращенной суммы S в интервал $[60 \text{ тыс. \$}, 103 \text{ тыс. \$}]$, S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.51. Вексель в сумме 1200\$ должен быть оплачен через 160 дней. Какую сумму P_I в среднем получит владелец векселя, если учтет его в банке через 15 дней? Есть основания считать, что с равной вероятностью учетная ставка будет лежать в пределах 6—7% годовых. Какова вероятность, что полученная сумма P будет лежать в пределах 1168 – 1170\$? Чему будет равен риск σ данной финансовой операции? Временная база — 360 дней.

1.52. Запланировано в начале второго квартала положить в банк 100 тыс. \$ до конца года. Обычно в данном банке ставки процентов по краткосрочным кредитам корректируют в начале каждого квартала. Есть основания считать, что годовые ставки простых процентов i_2, i_3, i_4 , соответственно, во втором, третьем и четвертом кварталах являются независимыми случайными величинами с дискретными распределениями:

$$\begin{array}{c|c|c|c} i_2, \% & 6 & 6,1 & 6,2 \\ \hline P & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} i_3, \% & 6 & 6,1 \\ \hline P & 0,7 & 0,3 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} i_4, \% & 6 & 6,2 \\ \hline P & 0,6 & 0,4 \end{array}.$$

Вычислите вероятность попадания наращенной суммы S в интервал $[104550$, 104600$]$, S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.53. Планируется положить через некоторое время в банк на депозит 1 млн \$ сроком на 1 год. Ожидается, что с равной вероятностью в первом полугодии простая процентная ставка будет находиться в пределах 5—6% , а во втором полугодии — в пределах 5,5—7% . К концу срока депозита определите характеристики наращенной суммы S : S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$, вероятность попадания S в интервал $[1,055 \text{ млн } \$, 1,06 \text{ млн } \$]$.

1.54. Планируется через месяц положить на год в банк 1 млн \$. Предполагается, что в первые полгода простая годовая ставка процентов будет постоянной и будет описываться равномерно распределенной случайной величиной в интервале $[6\%, 7\%]$, во втором полугодии с равной вероятностью может принять значения 7,5% и 8%. Вычислить вероятность попадания на-

ращенной суммы S в интервал $[1,06 \text{ млн } \$, 1,07 \text{ млн } \$]$, S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.55. Планируется в начале следующего года положить в банк 1200\$ на 2 года. Ожидается, что годовая ставка сложных процентов с равной вероятностью будет находиться в интервале $[8\%, 9\%]$. Вычислите вероятность того, что наращенная сумма S будет лежать в интервале 1400\$ — 1420\$, S_{min} , S_{max} , $E\{S\}$ и риск σ данной финансовой операции.

1.56. В начале следующего года планируется положить на депозит 500 тыс. \$ на год. Простая годовая ставка процентов может меняться в начале каждого квартала. Эксперты считают, что годовые ставки процентов $i_1 - i_4$, используемые, соответственно, в первом—четвертом кварталах, являются независимыми равномерно распределенными величинами в интервалах $[6\%; 6,5\%]$, $[6,25\%; 7\%]$, $[6,75\%; 8\%]$, $[7,5\%; 8,5\%]$. Смоделируйте выборку объема 100 из распределения величин $i_1 - i_4$ и на ее основе оцените среднее значение наращенной суммы, вероятность попадания наращенной суммы в следующий интервал $[534 \text{ тыс. } \$, 537 \text{ тыс. } \$]$.

1.57. Предполагается положить на депозит 100 тыс. \$ либо на год, с вероятностью 0,7 под 6% годовых, либо на два года, с вероятностью 0,2 под 6,5% годовых или на три года с вероятностью 0,1 под 7% годовых. Определите среднее значение наращенной суммы S , вероятность попадания S в интервал $[107 \text{ тыс. } \$, 120 \text{ тыс. } \$]$, S_{min} , S_{max} , $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.58. Планируется в начале следующего года положить в банк 200 тыс. \$ на 3 года под сложные проценты. Ставка процентов в банке корректируется в начале года и затем, на протяжении всего года, остается постоянной. Есть основания считать, что годовая ставка процентов $i(t) = f(t) + \xi_t$, где $f(t) = 0,05 + 0,001t$ — тренд, характеризующий общую тенденцию изменения ставок процентов, ξ_t — маржа, изменяющаяся по цепной зависимости Маркова, с двумя состояниями. Значение $t = 0$ соответствует началу начисления

процентов. В первом состоянии ξ_t принимает значение 0,005, во втором — значение 0,01. Вектор начальных состояний $\pi = (1; 0)$, матрица одношаговых переходов имеет следующие компоненты: $p_{11} = 0,8$; $p_{12} = 0,2$; $p_{21} = 0,1$; $p_{22} = 0,9$. Определите S_{min} , S_{max} наращенной суммы S , вероятность попадания S в интервал $[235,6 \text{ тыс. \$}, 236,7 \text{ тыс. \$}]$, среднее значение S , $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.59. В условиях предыдущей задачи вектор начальных состояний $\pi = (0,8; 0,2)$ и неизвестно, с какого состояния начинает свое движение цепь Маркова. Остальные условия остаются неизменными. Определите те же характеристики S , что и в предыдущей задаче.

1.60. В условиях задачи 1.58 годовая ставка сложных процентов корректируется в начале каждого полугодия. Остальные условия те же, что и в 1.58. Вычислите параметры наращенной суммы S из задачи 1.58.

Указание: воспользоваться ППП ФЭР.

1.61. Планируется в начале следующего года положить в банк на депозит 200 тыс. \$ на три квартала. Ставка простых процентов корректируется в начале каждого квартала и в течение квартала остается постоянной. Есть основания считать, что годовая ставка $i(t) = f(t) + \xi_t$, где $f(t) = 0,05 + 0,001 \cdot t$ — тренд; ξ_t — маржа, изменяющаяся по цепной зависимости Маркова. Параметры цепи те же, что и в задаче 1.58. Вычислите параметры наращенной суммы S : S_{min} , S_{max} , вероятность попадания S в интервале $[208200\$, 208500\$]$, среднее значение S и риск финансовой операции $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.62. В условиях предыдущей задачи ставка простых процентов корректируется в начале каждого месяца и в течение месяца остается постоянной, $K = 360$. Вычислите параметры наращенной суммы S из задачи 1.61.

2. Постоянные финансовые ренты

Поток платежей, все члены которого постоянные положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют *постоянной финансовой рентой* или просто *рентой*.

Рента характеризуется следующими параметрами: *член ренты* — размер отдельного платежа; *период ренты* — временной интервал между двумя последовательными платежами; *срок ренты* — время от начала первого периода ренты до конца последнего; *ставка процентов*, по которой производятся начисления на платежи.

По количеству выплат в году ренты делятся на годовые (выплаты раз в конце года, для рент *постнумерандо*) и p -срочные (p — количество выплат в году).

По количеству начислений процентов на протяжении года различают ренты с ежегодным начислением, с начислением m раз в году, с непрерывным начислением.

Ренты с бесконечным числом выплат называются *вечными рентами*.

Если срок ренты начинается сразу же после подписания контракта, такая рента называется *немедленной*, если устанавливается льготный период после подписания контракта, в течение которого рента не выплачивается, такая рента называется *отложенной* или *отсроченной*.

Если платежи выплачиваются в конце периода, то такая рента называется *обыкновенной* или *постнумерандо*, если в начале периода, то говорят о ренте *пренумерандо*.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются *наращенная сумма* и *современная величина*.

Нарращенная сумма (*amount of an annuity*) — сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами к концу срока действия ренты.

Современная величина (*present value*) — сумма всех членов потока платежей, дисконтированных на начало отсчета.

2.1. Нарращенная сумма ренты постнумерандо

Нарращенная сумма S p -срочной ренты с m -разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j определяется по формуле:

$$S = R \cdot s_{m:n; \frac{j}{m}}^{(p)}, \quad (1)$$

где R — годовой член ренты;

$$s_{m:n; \frac{j}{m}}^{(p)} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{P \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]} \quad (2)$$

коэффициент наращивания ренты.

Переходя в формулах (1), (2) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим наращенную сумму p -срочной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $j = \delta$:

$$S = R \cdot s_{n;\delta}^{(p)}, \quad s_{n;\delta}^{(p)} = \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{P \left(e^{\delta/p} - 1 \right)}. \quad (3)$$

2.2. Современная величина ренты постнумерандо

Современная величина A p -срочной ренты с m -разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j определяется по формуле

$$A = R \cdot a_{m n; \frac{j}{m}}^{(p)}, \quad (4)$$

где R — годовой член ренты;

$$a_{m n; \frac{j}{m}}^{(p)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m n}}{P \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right]} \quad (5)$$

коэффициент приведения ренты.

Переходя в формулах (4), (5) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим формулы для современной величины p -срочной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $j = \delta$:

$$A = R \cdot a_{n, \delta}^{(p)}, \quad a_{n, \delta}^{(p)} = \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{P \left(e^{\delta/p} - 1 \right)}. \quad (6)$$

2.3. Определение параметров рент постнумерандо

Один из неизвестных параметров ренты R , n , j или δ можно определить, если формулы для наращенной суммы (1), (3) или современной величины (4), (6) разрешить относительно неизвестного параметра.

При расчете срока ренты n следует принимать во внимание следующие обстоятельства. Расчетное значение n , как правило, будет дробным числом. Округлению до ближайшего меньшего числа подлежит число периодов ренты np . В результате такого округления будет возникать недоплата, которую компенсируют либо увеличением первого взноса, либо увеличением размера члена ренты.

Если заданной является современная величина A , то положительное значение n существует лишь для $R > Ap \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} - 1 \right]$ или для $R > Ap \left(e^{\delta/p} - 1 \right)$.

Ставку процентов j или δ находят как результат приближенного решения соответствующего уравнения одним из методов: *дихотомии, линейной интерполяции, Ньютона – Рафсона* [1].

2.4. Наращенная сумма и современная стоимость других видов постоянных рент

Рассмотрим ренты, которые отличаются от рассмотренных выше по применяемым процентным ставкам, срокам платежей, способу начисления процентов, моментом производства платежей.

2.4.1. Рента с простыми процентами

Современную величину A и наращенную сумму p -срочной ренты продолжительностью n лет с годовой ставкой простых процентов i и годовым членом R определяют по формулам

$$A = \frac{R}{p} \sum_{k=1}^{np} \left(1 + \frac{i \cdot s}{p} \right)^{-1}, \quad S = R \cdot n \left[1 + \frac{(np-1)i}{2p} \right].$$

2.4.2. Смешанные ренты

Срочные ренты ($p > 1$), у которых на платежи в пределах года начисляют простые проценты, а за годовые периоды — сложные, называют **смешанными** рентами. Современную величину $A_{см.}$ и наращенную сумму $S_{см.}$ таких рент определяют по формулам

$$A_{см.} = R_1 \cdot a_{n,i}, \quad S_{см.} = R_1 \cdot S_{n,i}, \quad R_1 = R \left[1 + \frac{(p-1)i}{2p} \right],$$

где R — годовой член ренты, $a_{n,i}$, $S_{n,i}$ — коэффициенты приведения и наращивания обычных годовых рент ($p = m = 1$), i — годовая ставка процентов.

2.4.3. Рента с периодом, превышающим год

Пусть период ренты $r > 1$, проценты начисляются раз в конце года по ставке i годовых, платеж в конце периода равен R_r , срок ренты n кратен r . Тогда наращенная сумма S и современная величина A равны:

$$S = R_r \frac{S_{n,i}}{S_{r,i}}, \quad A = R_r \frac{a_{n,i}}{a_{r,i}}.$$

2.4.4. Вечная рента

Рента, число выплат которой бесконечно, называется **вечной** рентой. Современная величина A_{∞} **вечной** p -срочной ренты, с m -разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j с годовым членом R

$$A_{\infty} = \frac{R}{P \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p} - 1 \right]}.$$

2.4.5. Отложенная рента

Начало действия *отложенной*, или *отсроченной*, ренты начинается спустя t лет после подписания финансового контракта. Очевидно, что запаздывание на t лет в выплате платежей по сравнению с обычной рентой не влияет на величину наращенной суммы отложенной (отсроченной) ренты. По иному обстоит дело с современной величиной отложенной ренты: она равна дисконтированному значению современной величины немедленной ренты (период дисконтирования равен величине t отсрочки платежей). Дисконтный множитель должен соответствовать применяемым процентным ставкам и способу начисления процентов.

Так, например, наращенная сумма S_t и современная величина A_t отложенной p -срочной ренты постнумерандо с m -разовым начислением процентов в году равны:

$$S_t = S, \quad A_t = A \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{-tm},$$

где S и A — наращенная сумма и современная величина соответствующей немедленной ренты постнумерандо.

2.4.6. Рента пренумерандо

Ренты с выплатами в начале периода называются рентами *пренумерандо*. При вычислении наращенной суммы и современной величины ренты пренумерандо можно использовать следующий прием. Все выплаты путем наращивания вывести на конец соответствующих периодов и к вновь полученной ренте постнумерандо применить обычные формулы для вычисления наращенной суммы и современной величины ренты.

Так, например, наращенная сумма \mathcal{S} и современная величина \mathcal{A} p -срочной ренты пренумерандо, с m -разовым начислением процентов в году равны:

$$\mathcal{S} = S \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}}, \quad \mathcal{A} = A \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}},$$

где S и A — наращенная сумма и современная величина соответствующей ренты постнумерандо.

Из этих формул следует, что наращенная сумма и современная величина на рент пренумерандо больше соответствующих величин ренты постнумерандо.

2.4.7. Ренты с платежами в середине периодов

Если поступления от произведенных инвестиций распределяются более или менее равномерно на протяжении периода, используют ренты с выплатами в середине периодов. В подобных ситуациях для уменьшения погрешности вычислений рекомендуется суммы поступлений за период относить к середине этого периода.

Наращенная сумма $S_{1/2}$ и современная величина $A_{1/2}$ p -срочной ренты с m – разовым начислением процентов в году равны:

$$S_{1/2} = S \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{2p}}, \quad A_{1/2} = A \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{2p}},$$

где S и A — наращенная сумма и современная величина p -срочной ренты постнумерандо с m -разовым начислением процентов в году.

2.4.8. Ренты со случайными параметрами

В ряде случаев, когда один или несколько параметров ренты заранее не известны, их можно рассматривать как случайные величины с заданным или прогнозируемым законом распределения. Нарощенная сумма и современная величина ренты в этом случае будут также случайными величинами. В таком случае естественно вести речь о вычислении среднего значения и дисперсии наращенной суммы или современной величины ренты. Если эти значения не удастся вычислить аналитически, их можно оценить, моделируя значения соответствующих случайных величин.

2.5. Задачи и примеры к разделу 2

2.1. В течение 30 лет создается пенсионный фонд. На поступившие средства начисляются сложные проценты по ставке 8,5% годовых. Сумма годовых взносов составляет 200\$. Определите величину фонда для следующих ситуаций: а) взносы и начисление процентов в конце года; б) взносы в конце каждого полугодия, начисление процентов в конце года; в) взносы и начисление процентов в конце каждого квартала; г) взносы в конце каждого полугодия, непрерывное начисление процентов по годовой ставке 8,5%.

2.2. На протяжении 25 лет создается резервный фонд. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 9,75% годовых. В течение первых 10 лет в конце каждого года в фонд вносили по 10 тыс. \$, в течение последующих 10 лет — по 20 тыс. \$ в конце года, а в последние 5 лет — по 25 тыс. \$ в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 25 лет?

2.3. Создается фонд в течение 5 лет. На поступающие в него средства начисляется 9,75% годовых. Сумма годового взноса — 1 тыс. \$, проценты начисляются в конце года. На сколько увеличится наращенная сумма при: а)

ежедневных взносах; б) ежедневной капитализации процентов; в) ежедневных взносах и ежедневной капитализации процентов? ($K = 365$ дней)

2.4. На протяжении 10 лет создается фонд. Взносы в него поступают в конце года в размере 8 тыс. \$. В течение первых 4 лет на поступившие средства начислялись 8 % годовых, в последующие 4 года — 8,25% годовых и в последние 4 года — 8,75% годовых. Определите величину фонда.

2.5. В течение 12 лет создается фонд, на поступающие в конце года средства начисляется 9% годовых. Годовой взнос — 10 тыс. \$. В первые 6 лет взносы поступали в конце года, в следующие 4 года — по полугодиям и в последние 2 года — в конце каждого квартала. Определите величину фонда.

2.6. На счет в банк, в течение 6 лет, в конце года поступает 15 тыс. \$ и начисляется 9,5% годовых. Имеет смысл перейти к ежемесячным взносам в банк (в конце каждого месяца), если это приведет к 5% увеличению суммы счета к концу шестого года. Целесообразно ли увеличение частоты взносов?

2.7. На протяжении 15 лет создается фонд. На поступающие средства начисляется 9,25% годовых. В течение 10 лет в конце каждого полугодия в фонд вносили по 5 тыс. \$. Затем в конце 12-го года было внесено 50 тыс. \$, а в начале 14-го года — 100 тыс. \$. Какова величина фонда к концу 15-го года?

2.8. Решено за 15 лет создать некоторый фонд. Взносы в конце каждого года составляют 10 тыс. \$, на поступающие средства начисляется 10,5% годовых. Первые 8 лет взносы поступали согласно намеченному плану. Затем было решено изменить порядок взносов: в конце 10-го и в начале 14-го годов внести в фонд по равной сумме S_0 , так, чтобы к концу 15-го года получить намеченную ранее сумму фонда. На суммы S_0 проценты начисляются по той же ставке, что и ранее. Чему равно значение S_0 ?

2.9. На счет в банк в течение 6 лет, под 10,2% годовых, в конце каждого полугодия вносили по 10 тыс. \$. Для финансирования некоторого проекта с этого счета в конце 7-го и 8-го годов было снято по 40 тыс. \$. Накопление денежных средств было продолжено на этом счете по той же ставке процен-

тов. Начиная с конца 9-го года, на счет в конце года вносили по 40 тыс. \$ в течение 5 лет. Какова сумма счета к концу 13-го года, если на остаток средств начислялось 10,2% годовых?

2.10. Некто, в возрасте 30 лет, решил создать фонд по дополнительной оплате к пенсии. Для этого было решено в течение 30 лет в конце каждого года вносить в банк по 500\$ под 6% годовых. Какую сумму можно будет снимать со счета ежемесячно, в конце каждого месяца, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, чтобы на протяжении 20 лет полностью исчерпать накопленный фонд? На остаток средств в фонде начисляется 6% годовых.

2.11. Какую сумму ежегодно нужно вносить на счет в банке под 8,5% годовых, чтобы через 20 лет накопить 100 тыс. \$, если: а) взносы в конце каждого полугодия; б) взносы в конце каждого месяца?

2.12. Какую сумму необходимо 40-летнему мужчине вносить на протяжении 20 лет в конце года на счет под 8% годовых, чтобы затем, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, на протяжении 20 лет в конце каждого месяца снимать по 200\$? На остаток на счете начисляется 8% годовых и счет должен быть исчерпан за 20 лет.

2.13. За какой срок можно накопить 100 тыс. \$, если в конце каждого года на счет вносится 15 тыс. \$ и на собственные средства начисляются раз в конце года сложные проценты по ставке 8,75% годовых? На сколько нужно увеличить годовые выплаты, чтобы не было недоплаты?

2.14. В условиях предыдущей задачи денежные взносы поступают в конце каждого квартала, а проценты начисляются в конце каждого полугодия. Необходимо дать ответы на вопросы предыдущей задачи.

2.15. В течение 8 лет создается фонд. Годовые взносы – в конце года по 12 тыс. \$; на собранные средства начисляется 10% годовых. В каком случае сумма фонда станет больше, если перейти к: а) ежемесячным взносам в конце каждого месяца; б) ежедневной капитализации процентов? ($K = 365$ дней)

2.16. В течение 8 лет создается фонд. Денежные поступления в фонд — в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляется 10% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе к: а) поквартальным взносам в конце каждого квартала; б) поквартальному начислению процентов; в) поквартальным взносам и начислению процентов?

2.17. В течение 6 лет создается фонд, взносы в который поступают в конце каждого полугодия равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 8,5% годовых. На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце 6-го года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

2.18. Планируется создать фонд взносами по 10 тыс. \$ в конце каждого года. Есть основания считать, что срок создания фонда и используемая годовая ставка процентов имеют следующее распределение вероятностей, приведенное в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Срок создания, года	Годовая ставка, %		
	7	8	8,5
Третий	0,2	0,1	0,05
Четвертый	0,05	0,1	0,15
Пятый	0,05	0,1	0,2

Для наращенной суммы фонда S вычислите: S_{\min} , S_{\max} , $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$, $P\{40 \text{ тыс.} \leq S \leq 50 \text{ тыс.}\}$.

2.19. Фонд будет создаваться 4 года, годовые взносы в фонд в конце года составляют по 100 тыс. \$. Годовые ставки процентов в фонде — i_2 , i_3 , i_4 , начисляемые соответственно во втором, третьем и четвертых годах, заранее не известны. Есть основание считать, что они являются независимыми случайными величинами с распределениями вероятностей:

$I_2,$ %	7	8
P	0,5	0,5

$i_3,$ %	8	8,5
P	0,2	0,8

$i_4,$ %	8,5	9,5
P	0,6	0,4

Для наращенной суммы фонда S вычислите: $S_{\min}, S_{\max}, E\{S\}, \sigma = \sqrt{D\{S\}}, P\{400 \text{ тыс.} \leq S \leq 455 \text{ тыс.}\}$.

2.20. Продается некоторая фирма, приносящая ежегодный доход в 500 тыс. \$, и этот доход можно будет получать в течение 50 лет. Какую цену следует добавить к стоимости недвижимости и оборудования фирмы исходя из ставки сложных процентов 8% годовых, чтобы получить полную стоимость фирмы, если доход получают: а) в конце каждого года; б) в конце каждого месяца?

2.21. Какую сумму разовым платежом нужно положить в банк под 8% годовых мужчине в возрасте 40 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста в 60 лет в течение 20 лет в начале каждого месяца снимать по 200\$, если проценты капитализируются: а) в конце года; б) в конце каждого полугодия?

2.22. Какую сумму разовым платежом нужно положить в банк мужчине в возрасте 60 лет, чтобы в течение 20 лет в конце каждого года снимать по 2 тыс. \$, если на остаток вклада меньше 10 тыс. \$ начисляется 5% годовых, больше или равно 10 тыс. \$ — 8% годовых?

2.23. Задолженность в 1 млн \$ планируется погасить следующим образом: в течение 3 лет в конце года выплачивается по 2 тыс. \$, а остальной долг гасится равными суммами S_0 в конце пятого и седьмого годов. На остаток долга начисляется 7,5% годовых. Чему равно значение S_0 ?

2.24. Стоит ли покупать за 980\$ облигацию номиналом 1 тыс. \$ и длительностью 5 лет, если она в конце каждого полугодия дает 40\$ процентного дохода и в конце срока погашается по номиналу, если есть возможность поместить эти денежные средства в банк под 9% годовых?

2.25. Авиационная фирма может продать покупателю свою продукцию по одному из двух вариантов оплаты: а) через год выплачивается 20 млн \$, затем с интервалом через год еще 4 платежа по 30 млн \$; б) через год выплачивается 30 млн. \$, затем с интервалом в полгода 8 платежей по 10 млн \$. Какой из вариантов более приемлем для покупателя, если он имеет возможность разместить денежные средства в банке под 8% годовых?

2.26. В аренду сдается оборудование стоимостью 1 млн \$ сроком на 4 года. Остаточная стоимость оборудования в конце аренды оценивается в 500 тыс. \$. На профилактический осмотр и ремонт арендодатель тратит дополнительно по 200\$ в конце второго и третьего годов. Какую годовую арендную плату следует брать: а) в начале каждого года; б) в конце каждого года, чтобы обеспечить норматив рентабельности в 15% годовых?

2.27. Участок сельскохозяйственных угодий может приносить ежемесячный доход в 200 тыс. \$ в конце каждого года, если на удобрения в начале года тратить по 2 тыс. \$. В какую сумму следует оценить этот участок при нормативе доходности в 12% годовых?

2.28. При выполнении условий предыдущей задачи назначьте среднюю цену за участок при условии, что ежегодные доходы являются независимыми в совокупности случайными величинами, равномерно распределенными в интервале [190 тыс. \$, 220 тыс. \$].

2.29. Имеются два варианта строительства и эксплуатации дороги: 1) в течение 2 лет ежемесячные инвестиции в строительство по 50 тыс. \$ в конце каждого месяца, затем профилактический ремонт после 5 лет эксплуатации дороги. На ремонт в начале каждого из 3 месяцев выделяется по 20 тыс. \$; 2) в течение 2 лет ежемесячные инвестиции в строительство по 80 тыс. \$ в конце каждого месяца, затем профилактический ремонт после 10 лет эксплуатации дороги. На ремонт в начале каждого из 4 месяцев планируется выделить по 25 тыс. \$. Временной горизонт эксплуатации дороги после завершения строительства — 50 лет для каждого из вариантов. Какой из вариантов наи-

более экономичный, если банк согласен финансировать строительство и эксплуатацию дороги при помещении на его счет денежных средств под 9% годовых? Для выбранного варианта оцените современную стоимость строительства и эксплуатации дороги.

2.30. На аукцион выставляется нефтеносный участок, который при вложении в него по 250 тыс. \$ в начале каждого квартала в течение года сможет в дальнейшем приносить ежегодный доход в конце каждого года в следующих размерах: первые 20 лет — по 10 тыс. \$, в последующие 10 лет — по 1 млн \$. Оцените стартовую цену участка при нормативе доходности в 9% годовых.

2.31. В условия предыдущей задачи внесем изменения. Ежегодные доходы являются независимыми в совокупности случайными величинами. Они равномерно распределены в интервале [9 млн \$, 10 млн \$] на первом этапе эксплуатации длительностью 20 лет. На втором этапе эксплуатации длительностью 10 лет имеют дискретное распределение: 4 млн \$ с вероятностью 0,7 и 5,5 млн \$ с вероятностью 0,3. На последнем этапе длительностью 5 лет доход — это дискретная случайная величина с следующим распределением вероятностей: 2 млн \$ с вероятностью 0,6; 1 млн \$ с вероятностью 0,3 и 0,5 млн \$ с вероятностью 0,1. Оцените среднюю современную стоимость этого нефтеносного участка для ставки дисконтирования в 10% годовых.

2.32. Планируется на протяжении 10 лет создать фонд с ежегодными поступлениями по 100 тыс. \$ в конце года. Какая должна быть ставка процентов, чтобы в фонде было накоплено 2,5 млн \$ при капитализации процентов: а) ежегодной; б) ежемесячной?

2.33. На протяжении 10 лет создается фонд с ежегодными поступлениями по 100 тыс. \$ в конце года. На поступившие средства начисляется 8% годовых, если сумма не превышает 500 тыс. \$, и 10% годовых, если сумма превышает 500 тыс. \$. Чему будет равна сумма фонда через 10 лет?

2.34. Долг в сумме 200 тыс. \$ должен быть погашен за 5 лет равными выплатами в конце каждого полугодия. На остаток долга начисляется 9,5% годовых. Определите величину разовой уплаты по погашению долга?

2.35. Долг в сумме 500 тыс. \$ выданный под 8,7% годовых гасится следующим образом: в течение 2 лет (льготный период) основной долг не гасится, затем сумма долга погашается равными платежами (постнумерандо) за 5 лет. Определите величину годовых платежей по погашению долга в течение пятилетнего периода, если: а) на протяжении льготного периода в конце года выплачиваются только проценты; б) проценты за льготный период присоединяются к сумме долга.

2.36. Долг в сумме 700 тыс. \$ гасится равными платежами в конце каждого года на протяжении 4 лет, затем гасится также равными платежами, но возросшими на 30% по сравнению с первым периодом, в течение последующих 3 лет в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 9,25% годовых. Чему равна величина годового платежа по погашению долга в первом периоде?

2.37. Долг в сумме 400 тыс. \$, выданный под 10% годовых, должен быть погашен за 8 лет равными платежами в конце каждого года. Однако после трех выплат, согласно достигнутой договоренности, остальную задолженность было решено погасить равными суммами S_0 в конце шестого, седьмого и восьмого годов по той же ставке процентов. Чему равно значение S_0 ?

2.38. За какой срок долг в сумме 525 тыс. \$ может быть погашен годовыми платежами в 80 тыс. \$ в конце каждого года, если на остаток долга начисляется 8,25% годовых? Если найденное значение округлить до ближайшего меньшего числа, то каким должен быть годовой член R по погашению долга, чтобы долг был погашен полностью?

2.39. Долг в сумме 370 тыс. \$ погашается в течение 5 лет равными платежами с годовой выплатой по 85 тыс. \$. Чему будет равна эффективность

займа в виде годовой ставки сложных процентов, если платежи производятся: а) в конце года; б) в начале года; в) в конце каждого месяца?

2.40. Долг в сумме 400 тыс. \$ погашается в течение 6 лет равными платежами с годовыми выплатами по 90 тыс. \$. Какой вариант погашения долга более выгоден для кредитора: а) погашение в конце каждого полугодия, начисление процентов на остаток долга в конце года; б) выплаты в конце года при ежемесячной капитализации процентов на остаток долга? Чему равна максимальная эффективность займа в виде годовой ставки сложных процентов?

2.41. Долг в размере 870 тыс. \$ намечено погасить в течение 10 лет платежами постнумерандо, по 120 тыс. \$ ежегодно. Первые четыре выплаты были сделаны согласно достигнутой договоренности. Затем было решено на 2 года отложить погашение задолженности и возобновить ее погашение равными выплатами постнумерандо, начиная с конца седьмого года. Какими должны быть погасительные платежи во втором периоде, чтобы намеченная ранее эффективность погашения ссуды не изменилась?

2.42. Фонд создается в течение 5 лет. На собранные средства начисляется 8,25% годовых. Годовые платежи по 24 тыс. \$ поступают в конце каждого месяца. На сколько процентов возрастает наращенная сумма фонда, если перейти к смешанной форме начисления процентов?

2.43. Фонд создается в течение 6 лет. На собранные средства начисляется 9,2% годовых. Годовые платежи в сумме 36 тыс. \$ поступают в конце каждого квартала. Первые 4 года использовалась смешанная форма начисления процентов, затем она была отменена. Чему равна наращенная сумма фонда в конце шестого года?

2.44. В течение полутора лет создается фонд. Взносы в сумме 100 тыс. \$ поступают в конце каждого месяца. На поступившие средства начисляется 7,5% годовых. Чему равна сумма фонда, если: а) начисляются простые про-

центы; б) сложные проценты; в) используется смешанная форма начисления процентов?

2.45. В течение 10 лет создается фонд, годовые взносы в сумме 400 тыс. \$ вносятся в конце каждого года под 12% годовых. На сколько можно уменьшить годовой взнос в фонд, чтобы получить ту же наращенную сумму, если взносы вносятся: а) в начале года; б) в начале каждого полугодия?

2.46. Долг в сумме 800 тыс. \$ гасится равными выплатами в конце каждого года в течение 5 лет, на остаток долга начисляется 8,5% годовых. В каком случае годовые расходы по обслуживанию долга возрастут больше и на сколько, если: а) будет предоставлена годовая отсрочка по погашению долга, проценты за этот период присоединяются к сумме долга; б) ставка годовых процентов возрастет на 0,5%?

2.47. Оценить, косвенно, какую сумму завещал А.Б. Нобель на учреждение международных премий, если эта сумма была положена в банк под 10% годовых. Каждый год назначается шесть Нобелевских премий по 1 млн \$ и 1 млн \$ идет на организационные расходы.

2.48. Месторождение полезных ископаемых планируется эксплуатировать в течение 40 лет. Ожидается, что в первые 30 лет чистый годовой доход составит 80 млн \$, а в последние 10 лет — 40 млн \$. Оцените современную стоимость доходов от эксплуатации месторождения для ставки 10 % годовых.

Указание: воспользуйтесь теорией рент с выплатами в середине периодов.

2.49. Некоторую задолженность предлагается погасить в течение 5 лет одним из следующих способов: а) выплачивать в конце каждого года по 200 тыс. \$; б) выплачивать в конце каждого полугодия по 97500\$. Для ставки дисконтирования 10% годовых определить, какой из этих способов в большей мере возмещает задолженность? Для какой ставки дисконтирования оба способа погашения задолженности будут равноценны?

2.50. Долг в сумме 800 тыс. \$ должен быть погашен в течение 8 лет равными платежами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 8% годовых. После 4 лет выплат, согласно намеченному плану погашения, должник, по согласованию с банком, решил гасить задолженность равными выплатами в конце каждого полугодия. Явившись в банк в конце седьмого года, должник решил оставшуюся задолженность погасить разовым платежом. Какую сумму ему нужно вернуть банку?

2.51. Кредит в сумме 700 тыс. \$ выдан под 10% годовых. Планируется погасить задолженность, выплачивая по 68 тыс. \$ в конце каждого года. За какой срок можно погасить задолженность? На сколько нужно увеличить намеченную сумму выплат, чтобы погасить задолженность не более чем за 8 лет?

2.52. В 1984 г. на химическом заводе в Бхопале (Индия) произошла крупная авария, повлекшая человеческие жертвы. Владелец предприятия, корпорация “Юнион Карбайд”, предложила в качестве компенсации 200 млн \$, выплачиваемых в течение 35 лет поквартально. Если бы правительство Индии согласилось с этим предложением, то какую сумму следовало бы поместить корпорации в банк под 10% годовых, чтобы произвести эти выплаты?

2.53. Продается участок земли, который может давать два урожая в год (через полгода). Для севооборота поочередно выращивают сельхозкультуры двух типов *A* и *B*. Чистый доход, который можно получить от продажи собранного урожая, оценивается в 1280\$ для сельхозкультуры типа *A* и в 2000\$ для сельхозкультуры типа *B*. Какую цену следует назначить на данный участок земли при нормативе доходности в 12% годовых?

3. Переменные потоки платежей

В финансовой практике часто приходится оперировать с потоками платежей, члены которых изменяются во времени. Поток платежей, члены которого изменяются в соответствии с каким-либо заданным законом развития, называется *переменной рентой*. Если такого закона развития нет, то соответствующая последовательность платежей представляет собой *нерегулярный поток платежей*.

Обобщающие характеристики *нерегулярного потока платежей*, такие как наращенная сумма и современная величина, могут быть получены только путем прямого счета: наращенная либо дисконтирования всех членов данного ряда платежей.

3.1. Потоки с разовыми изменениями платежей

Пусть общая продолжительность ренты равна n , этот срок разбит на k участков длительностью n_j , в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_j , а ставка процентов принимает значение i_j , $j = \overline{1, k}$. Наращенная сумма годовой ренты при начислении процентов раз в году

$$S = R_1 s_{n_1; i_1} (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_k} + R_2 s_{n_2; i_2} (1 + i_3)^{n_3} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_k} + \dots + R_k s_{n_k; i_k}. \quad (1)$$

Современная величина такой ренты

$$A = R_1 a_{n_1; i_1} + R_2 a_{n_2; i_2} (1 + i_1)^{-n_1} + \dots + R_k a_{n_k; i_k} (1 + i_{k-1})^{-n_{k-1}} \cdot \dots \cdot (1 + i_1)^{-n_1}. \quad (2)$$

Формулы (1), (2) могут быть применены и для p -срочных рент, в этом случае вместо коэффициентов $s_{n_j; i_j}$, $a_{n_j; i_j}$ следует использовать коэффициенты

$$s_{n_j; i_j}^{(p)}, a_{n_j; i_j}^{(p)}, j = \overline{1, k}.$$

3.2. Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году, причем каждый раз они изменяются по *арифметической прогрессии*. $R_j = R + (j-1)\frac{a}{p}$, где R_j — величина платежа в периоде с номером j ; R — величина первого платежа; a — абсолютный прирост платежей за год. Тогда современная величина такой ренты вычисляется по формуле

$$A = \left[Rp + \frac{a}{(1+i)^{1/p} - 1} \right] a_{n;i}^{(p)} - \frac{na(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p} - 1}, \quad (3)$$

где i — годовая ставка процентов, по которой на платежи начисляются проценты, а n — срок ренты. Нарощенная сумма данной ренты

$$S = A(1+i)^n. \quad (4)$$

При $p = 1$ формулы (3), (4) обращаются в известные результаты, приведенные в монографии [1].

Формулы (3), (4) получены для рент постнумерандо. Для рент пренумерандо можно использовать формулы (3), (4), если предварительно все платежи, выплачиваемые в начале периодов, вывести на конец соответствующих периодов путем их наращивания по ставке процентов i .

Часто при анализе переменных рент может возникнуть задача определения первого члена ренты R или его прироста a при условии, что все остальные параметры ренты заданы.

3.3. Рента с постоянным относительным изменением платежей

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году, причем каждый раз они изменяются по *геометрической прогрессии*.

$$R_j = Rq^j, j = \overline{2, np},$$

где R — величина первого платежа; q — постоянный относительный темп роста за период длительностью $\frac{1}{p}$.

Проценты на поступающие платежи начисляются раз в году. Тогда современная величина такой ренты

$$A = R \frac{q^{np}(1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}},$$

а наращенная сумма

$$S = A(1+i)^n.$$

3.4. Непрерывные постоянные потоки платежей

Если на протяжении всего срока ренты поступления платежей происходит непрерывно, то имеют *дело с постоянной непрерывной рентой*. Такую ренту можно рассматривать как предельный случай p -срочной ренты при $p \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ в формулах для наращенной суммы и современной величины p -срочной ренты, с m -разовым начислением процентов в году, получаем:

$$S = R \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{m \ln(1+j/m)}, A = R \frac{1 - (1+j/m)^{-mn}}{m \ln(1+j/m)}, \quad (5)$$

где R — годовой член; j — годовая ставка процентов.

Если наряду с непрерывными выплатами непрерывно начисляются проценты, то формулы для обобщающих характеристик такой ренты получаем из формулы (5), устремляя m к бесконечности и заменяя j на δ :

$$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}, \quad A = R \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta},$$

где δ — постоянная ставка непрерывных процентов.

3.5. Непрерывные переменные потоки платежей

В п. 3.4 годовая сумма ренты R равномерно распределялась на протяжении всего года. Однако на практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток платежей может существенно изменяться во времени. Если этот поток платежей непрерывен и описывается функцией $R(t)$, то наращенная сумма по непрерывной ставке δ за срок n

$$S = \int_0^n R(t) e^{\delta(n-t)} dt, \quad (6)$$

а современная величина такого потока

$$A = \int_0^n R(t) e^{-\delta t} dt. \quad (7)$$

Для *линейно изменяющегося непрерывного потока платежей* $R(t) = R + at$, для *экспоненциального потока платежей* $R(t) = R e^{bt}$. Из формул (6), (7) легко можно получить явные формулы для обобщающих характеристик этих потоков.

3.6. Задачи и примеры к разделу 3

3.1. Задолженность в сумме 800 тыс. \$ гасится в течение 8 лет. На остаток задолженности в течение первых 4 лет начисляется 10% годовых. Годовые выплаты в конце года в этот период составляют по 100 тыс. \$. В по-

следние 4 года на остаток задолженности начисляется 11% годовых, а задолженность гасится в конце каждого года выплатами по 110 тыс. \$. Остаток непогашенной задолженности возвращается в конце восьмого года. Какую сумму нужно уплатить по погашению задолженности в конце восьмого года?

3.2. Фонд в сумме 1 млн \$ должен быть создан за 10 лет. В первые 5 лет в фонд в конце каждого года вносится по 60 тыс. \$, на поступившие средства начисляется 10% годовых. В последние 5 лет в фонд в конце каждого года вносится по 61 тыс. \$ и в этот период на денежные суммы начисляется по 11% годовых. Какую сумму нужно внести в фонд в конце десятого года, чтобы в фонде была накоплена намеченная сумма?

3.3. Задолженность в сумме 400 тыс. \$ гасится в течение 4 лет возрастающими платежами в конце каждого года. Каждый год платежи увеличиваются на 20 тыс. \$, на остаток задолженности начисляется 8% годовых. Какова должна быть сумма первого платежа, чтобы долг был полностью погашен?

3.4. За 6 лет должен быть создан фонд в сумме 400 тыс. \$. На поступающие средства начисляется 10% годовых. Намечено каждый год увеличивать взносы, поступающие в фонд в конце года на 10 тыс. \$. Какую первоначальную сумму нужно внести в фонд?

3.5. На разработку и освоение нефтяного месторождения затрачено 100 тыс. \$. Планируется, что доходы от эксплуатации месторождения в конце каждого года составят по 30 тыс. \$ в первые пять лет, по 20 тыс. \$ в следующие 5 лет и по 10 тыс. \$ в последние 5 лет. При норме доходности 30% годовых окупят ли доходы произведенные затраты?

3.6. В условиях предыдущей задачи рассчитайте эффективную ставку инвестирования средств в эксплуатацию месторождения в виде годовой ставки сложных процентов. Вычисления произведите с точностью до 0,5%.

3.7. Задолженность в сумме 800 тыс. \$ гасится платежами в конце каждого года на протяжении 7 лет. В первые четыре года выплачивается по 100 тыс. \$. Какие годовые выплаты должны производиться в последние три года,

чтобы долг был полностью погашен, если на остаток долга начисляется 6% годовых?

3.8. Ссуда в размере 200 тыс. \$ выдана на 3 года под 11% годовых и должна быть погашена разовым платежом в конце третьего года. Для погашения задолженности должник решил создать погасительный фонд, размещая денежные средства в банке под 11,5% годовых. В течение первого года он вносил в банк по 5 тыс. \$ в конце каждого месяца, на протяжении второго года — по 15 тыс. \$ в конце каждого квартала. Какую сумму ему нужно внести в банк через 2,5 года, чтобы суммы погасительного фонда было достаточно для погашения долга? В расчетах используются сложные ставки процентов.

3.9. Фонд в сумме 750 тыс. \$ должен быть создан за 6 лет. Для этого в банк в конце каждого года вносили по 100 тыс. \$ на протяжении первых трех лет, затем по 110 тыс. \$ в конце каждого года в последние 3 года. Под какую годовую ставку процентов в банке размещались денежные средства? Вычисления произвести с точностью до 0,1%.

3.10. В банке в конце каждого года размещают денежные средства под 10% годовых для создания фонда. В первые 4 года вносили по 50 тыс. \$ ежегодно, затем — по 100 тыс. \$ ежегодно. Через сколько лет сумма, накопленная в фонде, впервые превысит 1 млн \$?

3.11. Создается фонд, взносы в который вносят в конце каждого года на протяжении 8 лет. В первые 5 лет планируется вносить по 100 тыс. \$, в последние три года — по 200 тыс. \$. Ожидается, что в первые 4 года годовая ставка процентов будет 8% с вероятностью 0,8 и 8,5% с вероятностью 0,2. Затем в последние 4 года ставка процентов будет постоянной и будет принимать значение 8,5% с вероятностью 0,7 и 9% с вероятностью 0,3. Для наращенной суммы фонда S определить следующие характеристики: $E\{S\}$, $D\{S\}$, S_{min} , S_{max} , $P\{1530 \text{ тыс.} \leq S \leq 1550 \text{ тыс.}\}$.

3.12. Создается фонд, денежные средства в который вносятся в конце года под 8,5% годовых. В 5 первых лет в фонд вносили по 100 тыс. \$. Затем в течение 2 лет выплаты в фонд не проводились. Начиная с конца восьмого года, выплаты были возобновлены в размере 120 тыс. \$ ежегодно. Чему будет равна сумма фонда на конец десятого года?

3.13. Задолженность в сумме 720 тыс. \$ погашается по частям платежами в конце года. На остаток задолженности начисляется 7,2% годовых. Первые 3 года в счет погашения задолженности вносилось по 100 тыс. \$, из которых 90 тыс. шло на погашение основного долга. Затем в течение 2 лет в конце каждого года выплачивались только процентные платежи. Начиная с конца шестого года, стали погашать задолженность, выплачивая сумму R в конце каждого года. Чему равно значение R , если задолженность должна быть полностью погашена к концу восьмого года?

3.14. В условиях предыдущей задачи найти R , если на протяжении 2 лет, когда не гасилась основная задолженность, проценты не выплачивались, а присоединялись к сумме долга.

3.15. На протяжении 8 лет создается фонд. На счет фонда внесено 100 тыс. \$ в конце первого года, 200 тыс. \$ — в конце третьего года, 250 тыс. \$ — в конце пятого года, 280 тыс. \$ — в конце седьмого года и через полгода — 250 тыс. \$. На собранные средства в течение первых 4 лет начислялось 8% годовых, в последние 4 года — 8,5% годовых. Какова сумма фонда к концу восьмого года, если на собранные средства начислялись сложные проценты?

3.16. Задолженность в сумме 750 тыс. \$ погашается нерегулярными выплатами: 100 тыс. \$ в конце 1,5 года, 200 тыс. \$ в конце третьего года, 250 тыс. \$ через 3,5 года после получения ссуды. На остаток задолженности начисляется 7,2% годовых. Какую сумму нужно вернуть в конце четвертого года, чтобы полностью погасить задолженность?

3.17. Долг в сумме 653 тыс. \$ должен быть возвращен по частям за 6 лет. В течение первых 2 лет в счет погашения задолженности намечено вы-

плачивать по 80 тыс. \$ в конце каждого полугодия, в последующие 2 года — по 90 тыс. \$ в конце каждого полугодия. На последнем этапе планируется выплачивать равные суммы R в конце каждого квартала, чтобы полностью погасить задолженность. Чему должно быть равно значение R , если на остаток долга начисляется 9,2% годовых, $K = 360$? Какую сумму единовременным платежом должен выплатить должник, чтобы полностью погасить долг: а) в конце третьего года; б) в конце 4,25 года?

3.18. Имеются два варианта строительства и эксплуатации здания. По первому варианту капитальные затраты на строительство составят 200 тыс. \$. Эксплуатационные и ремонтные расходы: в первые 20 лет — по 2 тыс. \$ в конце каждого года, в следующие 20 лет — по 4 тыс. \$ в конце каждого года и в последние 20 лет — по 8 тыс. \$ в конце каждого года. По второму варианту капитальные затраты составят 250 тыс. \$, что приведет к уменьшению соответствующих затрат на эксплуатацию и ремонт в 2 раза по сравнению с первым вариантом. Для ставки сравнения $i = 10\%$ годовых вычислите удельный вес современной стоимости затрат на эксплуатацию и ремонт по отношению к капитальным затратам на строительство: $\frac{A_m}{K_m}$, где A_m — современная стоимость; K_m — капитальные затраты; m — номер варианта. Для какого варианта удельный вес затрат по эксплуатации и ремонту будет меньше?

3.19. Оборудование стоимостью 450 тыс. \$ планируется эксплуатировать в течение 10 лет, после чего оно будет заменено на аналогичное, стоимость которого, по оценкам экспертов, возрастет на 10%. Для замены оборудования ускоренно создается амортизационный фонд, взносы в который в конце каждого года увеличиваются на 2,5 тыс. \$. На собранные средства в амортизационном фонде начисляется 7,25% годовых. Какова должна быть величина первого взноса в фонд?

3.20. Планируется, что в период освоения месторождения полезных ископаемых годовые доходы, приведенные на конец года, будут линейно

возрастать на 1 млн \$ в год в течение трех лет, затем в течение 10 лет доходы будут постоянны. В период истощения ископаемых, длительность которого 5 лет, годовые доходы будут сокращаться на 2 млн \$ в год. Чему равна современная стоимость всех доходов от эксплуатации месторождения при нормативе доходности 20% годовых, если первый годовой доход оценивается в 10 млн \$?

3.21. При сохранении условий предыдущей задачи оцените с точностью до 0,5% эффективность инвестирования 20 млн \$ в разработку месторождения в виде годовой ставки сложных процентов.

3.22. Ипотечная ссуда в 80 тыс. \$ выдана на 10 лет под 12% годовых. Погашение ссуды в конце каждого месяца. В первые 4 года долг погашается ускоренно: каждый месяц сумма погасительного платежа возрастает в 1,00407 раза по сравнению с предыдущим месяцем. В последние 6 лет ежемесячные суммы погасительных платежей постоянны. Чему равна сумма первого погасительного платежа?

3.23. Планируется, что в период освоения газового месторождения годовых доходы, приведенные на конец года, будут возрастать в 1,1 раза по сравнению с предыдущим годом в течение 3 лет. Затем в течение 12 лет доходы будут постоянны. В период истощения месторождения годовые расходы будут линейно сокращаться на 3 млн \$ в год в течение 5 лет. Чему равна современная стоимость всех доходов от эксплуатации месторождения при нормативе доходности в 25% годовых, если первый годовой доход оценивается в 12 млн \$?

3.24. В условиях предыдущей задачи оцените с точностью до 0,5%, эффективность инвестирования 15 млн \$ в разработку месторождения в виде годовой ставки сложных процентов.

3.25. Текущая задолженность равна 250 тыс. \$. Решено погасить ее в течение 10 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по арифметической прогрессии, причем абсолютный прирост за год равен поло-

вине первого члена. Погашение основного долга начинается с конца третьего года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 6,5% в год. В первые 2 года выплачиваются только проценты в конце каждого года. Определите сумму всех выплат B по погашению долга и сумму процентных платежей I .

3.26. При сохранении условий предыдущей задачи определите те же значения B и I , если в течение первых двух лет проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга.

3.27. Текущая задолженность равна 300 тыс. \$. Решено погасить ее в течение 8 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой возрастают по геометрической прогрессии, увеличиваясь за год на 10%. Погашение основного долга начинается с конца третьего года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 5,5% в год. В первые 2 года выплачиваются только проценты в конце каждого года. Определите сумму всех выплат B по погашению долга и общую сумму процентных платежей I .

3.28. В условиях задачи 3.27 определите те же значения B и I , если в течение первых двух лет проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга.

3.29. Долг в сумме 180 тыс. \$ должен быть погашен за 6 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по арифметической прогрессии, причем первая выплата равна 50 тыс. \$. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 7,2% в год. Определите сумму всех процентных платежей.

3.30. Долг в сумме 720 тыс. \$ должен быть погашен за семь лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по геометрической прогрессии, причем первая выплата равна 80 тыс. \$. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 6,1% в год. Определите сумму всех процентных платежей I .

3.31. Долг в сумме 300 тыс. \$ должен быть погашен за 6 лет платежами в конце года. Первая выплата равна 85 тысяч \$. Далее долг может гаситься последовательностью платежей, изменяющейся либо по арифметической, либо по геометрической прогрессии. На остаток долга начисляются 7,2% в год. По какой схеме платежей сумма процентных платежей будет больше и на сколько?

3.32. Решено погасить долг в сумме 520 тыс. \$ рентными платежами, убывающими по арифметической прогрессии, абсолютное годовое уменьшение платежей составляет 10 тыс. \$, срок погашения — 8 лет. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 6,5% в год. Определите сумму всех процентных платежей P . Увеличится или уменьшится сумма процентных платежей и на сколько, если долг будет погашаться по схеме возрастающей арифметической прогрессии с тем же абсолютным приростом?

3.33. В условиях предыдущей задачи ответьте на те же вопросы при условии, что долг гасится по схеме платежей, изменяющихся по геометрической прогрессии. Относительное годовое изменение платежей составляет 10% .

3.34. Решено в течение 10 лет создать фонд в сумме 1 млн \$. На денежные средства, поступающие в фонд в конце каждого года, начисляется 8,75% годовых. Первый взнос в фонд составляет 80 тыс. \$. В каком случае сумма всех выплат в фонд будет меньше, если взносы будут изменяться по возрастающей или убывающей арифметической прогрессии? На сколько изменится сумма выплат?

3.35. Решено в течение 3 лет создать фонд в размере 100 тыс. \$ по схеме возрастающих в геометрической прогрессии взносов, поступающих в начале каждого года. Первый взнос составляет 10 тыс. \$. На сколько процентов должны возрастать последующие платежи, чтобы фонд был создан?

3.36. Задолженность в сумме 270,4 тыс. \$ необходимо погасить за 4 года серией платежей, убывающих в геометрической прогрессии и вносимых в конце года. Первый взнос в счет погашения равен 100 тыс. \$, на остаток долга начисляется 11% годовых. На сколько процентов k должен убывать каждый платеж, чтобы долг был полностью погашен? Вычисления произвести с точностью до 0,5%.

3.37. Амортизационный фонд в сумме 263 тыс. \$ должен быть ускоренно создан за 4 года взносами, поступающими в конце года и образующими возрастающую геометрическую прогрессию. На средства, аккумулируемые в фонде, начисляется 9% годовых. Первый взнос в фонд составил 50 тыс. \$. На сколько процентов k должен возрастать каждый последующий взнос, чтобы фонд был создан? Вычисление произвести с точностью до 0,5%.

3.38. Планируется в течение 8 лет путем нерегулярных взносов создать фонд, на поступающие средства будут начисляться 10% годовых. В конце второго года планируется внести 240 тыс. \$, в конце пятого — 180 тыс. \$, в конце седьмого года — 360 тыс. \$. В силу непредвиденных обстоятельств, с равной вероятностью, намеченные суммы могут отклоняться от своего номинала в положительную и отрицательную сторону не более чем на 5%. Смоделируйте 100 реализаций намечаемых выплат и по ним оцените среднюю сумму фонда, ее дисперсию и вероятность попадания суммы фонда в интервал (1010 тыс. \$, 1100 тыс. \$). Чему равны S_{min} и S_{max} наращенной суммы фонда?

3.39. В разработку месторождения полезных ископаемых вложено 2,5 млн \$. Ожидается, что на протяжении первых пяти лет ежегодные доходы составят по 4 млн \$ в год, в следующие пять лет — по 3 млн \$ в год и в последние пять лет — по 1 млн \$ в год. Доходы поступают непрерывно и равномерно в пределах соответствующих периодов. При нормативе доходности в 20% годовых оцените, на сколько приведенные доходы превысят затраты на разведку и разработку месторождения.

3.40. В условиях предыдущей задачи оцените, на сколько процентов возрос приведенный доход от эксплуатации месторождения при непрерывном и равномерном распределении доходов в пределах года по сравнению со случаем, когда соответствующие доходы поступали бы в конце каждого года.

4. Конверсия рент

В финансовой практике приходится иметь дело со случаями, когда необходимо изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату рент, т.е. необходимо *конвертировать* ренту. В самом простом случае конверсия ренты сводится к замене ренты единовременным платежом, т.е. по существу является *выкупом ренты*. В таком случае вместо ренты выплачивается современная ее стоимость (см. разделы 2, 3). Естественно, что процентная ставка, по которой вычисляется современная стоимость ренты, должна удовлетворять обе стороны, участвующие в финансовой операции.

Простым вариантом конверсии является замена единовременного платежа рентой. К подобной замене прибегают всегда, когда необходимо некоторый товар купить в *рассрочку*. Задача в данном случае сводится к расчету параметров современной величины ренты. Такие задачи обсуждались в разделах 2, 3.

4.1. Изменение параметров рент

Изменение параметров ренты фактически означает замену одной ренты на другую. Ставку процентов, характеризующую ренту, обычно стремятся не менять так как изменение ставки процентов фактически означает нарушение финансовых отношений сторон. Параметры ренты изменяют на основе принципа *финансовой эквивалентности* сторон, выражающегося в том, что современные величины рент, до и после изменения параметров, должны быть равны.

Если исходная рента заменяется на отложенную на t лет ренту длительностью n лет с годовым членом R и p -разовыми выплатами в году с m -разовым начислением процентов в году по годовой ставке j , то, исходя из принципа финансовой эквивалентности, имеем равенство

$$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mt}, \quad (1)$$

где A — современная величина исходной ренты, вычисленная по годовой ставке j с m -разовым начислением процентов в году.

Если один из параметров R, n, p, t заменяющей ренты неизвестен, то его можно определить из равенства (1). При этом надо иметь в виду, что n и p — это целые числа. Поэтому соответствующие значения n и p , найденные из равенства (1), должны быть округлены до целых чисел, а недоплата, возникшая из-за округления, должна быть компенсирована, например, путем увеличения R . Следует также учитывать, что не для всех наборов параметров заменяющей ренты уравнение (1) может быть разрешено относительно одного из неизвестных параметров.

Подобные рассуждения можно обобщить на случай, если исходная рента конвертируется в нерегулярный поток платежей, члены которого изменяются по известному закону (см. раздел 3).

4.2. Объединение рент

Особым случаем замены ренты является объединение рент в одну. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда несколько фирм сливаются (объединяются) в одну. Задолженности этих фирм, погашаемые рентными платежами, фирма - правопреемница должна гасить своим рядом платежей.

При объединении (консолидации) нескольких рент в одну также исходят из принципа *финансовой эквивалентности*, состоящего в том, что

$$\sum_{s=1}^k A_s = A, \quad (2)$$

где A_s — современная величина s -ой ренты, вычисленная по единой ставке сравнения i либо по ставке i_s , характерной для этой ренты, а A — современная величина заменяющей ренты, вычисленная по ставке i , удовлетворяющей все стороны, участвующие в операции объединения.

Вопрос о ставках процентов, по которым производится дисконтирование в формуле (2), должен решаться на основе компромиссного решения, удовлетворяющего все стороны, участвующие в этой финансовой операции. Уравнение (2) предполагает, что начало срока действия всех рент совпадает. Если моменты начала рент не совпадают во времени, то, дисконтируя их современные величины на начало самой ранней ренты, получим необходимые для уравнения (2) значения современных величин.

При объединении рент могут встретиться самые различные постановки задач, которые необходимо решать исходя из равенства (2). Самые простейшие из них — определение размера члена заменяющей ренты и определение продолжительности заменяющей ренты при условии, что все характеристики рент, кроме искомой, заданы.

В финансовой практике возможен и обратный процесс, когда одну ренту надо расщепить на несколько рентных платежей. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда фирма распадается на несколько предприятий, каждому из которых достается определенная доля долговых обязательств и эти обязательства надо гасить рентными платежами. При решении подобных задач также исходят из принципа финансовой эквивалентности, аналогичного уравнению (2).

4.3. Задачи и примеры к разделу 4

4.1. Здание стоимостью 100 млн \$ можно приобрести либо разовым платежом, либо в рассрочку на 10 лет с равными выплатами в конце каждого месяца. На остаток задолженности при покупке в рассрочку начисляется 8,5% годовых. Чему равны месячные погасительные платежи R и суммарные процентные платежи I , если здание приобретается в рассрочку?

4.2. На сколько возрастут или уменьшатся суммарные процентные платежи в условиях предыдущей задачи, если погасительные платежи при покупке в рассрочку будут линейно убывать в год на 5 тыс. \$ при выплатах в конце года?

4.3. Задолженность в сумме 250 тыс. \$ должна быть погашена за 8 лет равными выплатами в конце каждого месяца, на остаток долга начисляется 7,5% годовых. После 3 лет выплат, согласно первоначальной договоренности, клиент попросил в банке отсрочку на 2 года по погашению основного долга. За последние 3 года долг должен быть погашен равными поквартальными платежами. Чему равен размер поквартальных платежей R , выплачиваемых в конце каждого квартала, если: а) в течение двухлетнего льготного периода выплачиваются только процентные платежи в конце каждого года; б) в течение льготного периода процентные платежи не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

4.4. Долг в сумме 300 тыс. \$ должен быть погашен за 10 лет равными выплатами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 8,2% годовых. После трех лет выплат, согласно первоначальной договоренности, должник попросил в банке отсрочку на 3 года для погашения основного долга. После этой отсрочки остаток долга предлагается гасить полугодовыми платежами постнумерандо в размере 25 тыс. \$. Чему должно быть равно число полугодовых платежей n и чему равна недоплата b из-за округления n до целого числа, чтобы долг был полностью погашен, если: а) за время льготно-

го трехлетнего периода процентные платежи периодически выплачивались в конце каждого года; б) процентные платежи за время льготного периода не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

4.5. Решено за 8 лет создать фонд в сумме 800 тыс. \$ путем равных годовых платежей постнумерандо, на поступающие платежи начисляется 8,75% годовых. Четыре года платежи в фонд выплачивались согласно намеченному графику. Затем, в силу некоторых обстоятельств, в течение последующих двух лет платежи в фонд не поступали. Чтобы накопить намеченную сумму к сроку, было решено в последние 2 года увеличить сумму годовых платежей. На сколько нужно увеличить сумму годовых платежей?

4.6. В условиях предыдущей задачи в последние 2 года создания фонда решено вносить в фонд в конце каждого полугодия по 75 тыс. \$. На сколько меньше или больше будет накопленная сумма фонда по отношению к намеченной сумме в 800 тыс. \$?

4.7. После двух лет перерыва в выплатах в фонд (при сохранении условий задачи 4.5) решено вносить в фонд в конце каждого полугодия по 50 тыс. \$. Выплаты в фонд прекращаются, как только накопленная сумма фонда превысит 800 тыс. \$. На сколько лет больше придется создавать фонд по отношению к намеченному сроку в 8 лет?

4.8. Фирмы А и В "сливаются" с фирмой С. Полтора года назад фирма А взяла кредит в банке на сумму 250 тыс. \$ на 4 года под 7,2% годовых с погашением равными выплатами в конце каждого полугодия. Фирма В в том же банке год назад взяла кредит на сумму 400 тыс. \$ под 8,3% годовых на 5 лет с погашением равными выплатами в конце каждого года. Фирма С должна погасить долги фирм А и В в течение 6 лет равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 9% годовых. Какую годовую сумму по оплате долга должна выплачивать фирма С, если к моменту объединения фирма А произвела три погасительных платежа, а фирма В — один? Расчеты проведите при условии, что долги фирм А и В на момент

их объединения — это погашенная основная задолженность по их первоначальным обязательствам.

4.9. Ответьте на поставленный вопрос предыдущей задачи исходя из расчета задолженностей фирм А и В по ставке 9% годовых.

4.10. Амортизационный фонд должен быть создан за шесть лет в сумме 475 тыс. \$ посредством равных полугодовых взносов постнумерандо. На собранные средства начисляется 7,6% годовых. В силу некоторых обстоятельств взнос в фонд в конце третьего года был сделан в размере 75% планируемого. Для компенсации недоплаты предлагается последующие годовые запланированные взносы вносить в фонд ежемесячно, равными платежами постнумерандо. Будет ли при этом амортизационный фонд больше или меньше запланированного и на сколько?

4.11. Облигация с номиналом 1 тыс. \$ и объявленной доходностью 9% годовых сроком погашения через 4 года куплена в момент ее выпуска 1 января. По облигации каждые полгода выплачивается купонный доход. Через некоторое время владелец облигации решил ее продать. Какую цену он назначит за облигацию при норме доходности 9% годовых, если: а) облигация продается 15.02 следующего года; б) продается 15.08 следующего года? Временная база $K = 360$ дней.

4.12. Для проведения профилактических ремонтов вновь построенного шоссе была выделена некоторая сумма денег, которую разместили в банке под 8,2% годовых. Ремонтные работы было решено проводить через каждые 5 лет и на эти цели выделять каждый раз по 20 тыс. \$. Временной горизонт ремонтного обслуживания шоссе — 50 лет. После 10 лет эксплуатации шоссе было решено профилактические ремонты проводить через каждые два года. Какую сумму нужно будет снимать со счета в банке на ремонтные работы, если для этих целей планируется расходовать каждые два года равные суммы?

4.13. Три фирмы А, В, С объединяются 1.01 в одну фирму D. Фирма А 4 года назад взяла в банке кредит на сумму 280 тыс. \$ на 7 лет (погашение задолженности равными платежами в конце каждого года). Фирма В 3 года назад в том же банке взяла кредит на сумму 350 тыс. \$ на 8 лет с погашением долга в конце каждого полугодия равными выплатами. Фирма С 2 года назад в том же банке получила кредит на сумму 300 тыс. \$ на 7 лет и погашала его платежами в конце года, возрастающими каждый раз на 10 тыс. \$. Все три фирмы получали кредит под 10% годовых. Фирма D должна погасить долги фирм А, В, С за 5 лет равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 10% годовых. Какую сумму фирма D должна ежегодно возвращать банку?

4.14. В условиях предыдущей задачи фирма D решила разовым платежом 1.01 погасить долги фирм А, В, С. Какую сумму следует вернуть банку?

4.15. Амортизационный фонд в сумме 450 тыс. \$ должен быть создан за 8 лет равными годовыми платежами постнумерандо. На собранные средства начисляется 8,5% годовых. После двух выплат в фонд решено изменить порядок взносов: выплаты производятся через два года платежами постнумерандо, возрастающими каждый раз на 10 тыс. \$. Чему равна сумма взноса в фонд в конце четвертого года?

4.16. При тех же условиях что и в предыдущей задаче, сумма, внесенная в фонд в конце четвертого года, составила 100 тыс. \$. На сколько должен возрасть либо убывать этот платеж в дальнейшем, чтобы к концу срока в фонде была накоплена намеченная сумма в 450 тыс. \$?

4.17. Фирма А 1 января 1995 г. получила кредит в банке на 250 тыс. \$ на 5 лет под 9,8% годовых. Погашение кредита предусмотрено равными выплатами в конце года. В январе 1998 г. фирма А разделилась на три фирмы В, С, D, у которых соответственно остались 40, 25 и 35% непогашенного долга фирмы А. Этот долг должен быть погашен за 2 года. Фирма В погашает долг годовыми платежами, фирма С — полугодовыми, а фирма D — покварталь-

ными платежами (все платежи — постнумерандо). Определите сумму годовых платежей R_B , R_C , R_D фирм B, C, D.

4.18. Амортизационный фонд в сумме 875 тыс. \$ намечено создать за 5 лет путем равных взносов в конце каждого года. На созданные средства начисляется 9,5% годовых. После двух лет взносов в фонд решено ускорить создание фонда: взносы вносить в конце каждого полугодия, увеличивая выплаты каждый раз на 10 тыс. \$, по сравнению с прежним взносом. Создание фонда прекращается, как только сумма фонда превысит намеченный уровень. На сколько лет раньше будет создан фонд?

4.19. В условиях предыдущей задачи взносы в фонд после двух лет намечено производить по схеме возрастающей геометрической прогрессии, увеличивая каждую выплату на 10% по сравнению с предыдущим уровнем. На сколько лет раньше будет создан фонд?

4.20. Задолженность, в сумме 100 тыс. \$, должна быть погашена равными платежами R в конце каждого года за 3 года. На остаток задолженности начисляется 10% годовых. Однако в силу некоторых обстоятельств предполагается, что с равной вероятностью сумма первого погасительного платежа R_1 будет лежать в интервале $[0,9 R, 1,1 R]$, сумма второго погасительного платежа R_2 , также с равной вероятностью, будет лежать в интервале $[0,8 R; R]$. Последний погасительный платеж R_3 вносится таким, чтобы задолженность была полностью погашена. Считая, что платежи R_1 и R_2 являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами, вычислите среднее значение R_3 и вероятность того, что $R_3 \geq R$.

4.21. Задолженность в сумме 85 тыс. \$ должна быть погашена за 5 лет равными платежами R в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 8,5% годовых. Однако в силу некоторых обстоятельств погасительные платежи могут отклоняться от намеченного уровня не более чем на 5% в положительную либо отрицательную сторону. Последний платеж должен быть таким, чтобы долг был полностью погашен. По 100 реализациям

процесса погашения долга оцените среднее значение и дисперсию последнего платежа.

5. Планирование погашения долгосрочной задолженности

Разработка плана погашения долгосрочной задолженности (займа) состоит в составлении графика периодических выплат платежей должником. Такие расходы должника обычно называют *расходами по обслуживанию долга* (*debt service*) или *срочными уплатами*, поскольку они должны быть выплачены в оговоренные сроки. Срочные уплаты обычно включают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения основного долга. Размеры срочных уплат существенно зависят от условий погашения долга, которые предусматривают: срок займа; продолжительность *льготного периода* (*grace period*); уровень и способ начисления процентов. На протяжении льготного периода, если он предусмотрен условиями займа, основной долг не гасится, но периодически выплачиваются проценты либо они присоединяются к сумме основного долга. В долгосрочных займах долг обычно погашается по частям, значительно реже – одним платежом в конце срока займа.

При определении размера срочных уплат будем использовать следующие основные обозначения: D — сумма первоначального долга; Y — размер срочной уплаты; I — проценты по займу; R — расходы по погашению основного долга; g — годовая ставка процентов по займу; n — срок займа; L — продолжительность льготного периода.

Если выплачиваются проценты и погашается основной долг, то, по определению, срочная уплата $Y = I + R$; если в льготном периоде периодически выплачиваются проценты, то в этом периоде $Y = I$.

Разработанный план погашения задолженности позволяет оценить стоимость долга на любой момент с учетом всех поступлений для его погашения. Это особенно важно, если действующий план погашения задолженности в дальнейшем приходится пересматривать.

5.1. Формирование погасительного фонда

В этом пункте рассматриваются займы, которые погашаются разовым платежом в конце срока займа. При этом проценты выплачиваются периодически либо присоединяются к сумме основного долга. При значительной сумме займа и длительном его сроке разовое погашение займа весьма затруднительно. Обычная мера, к которой прибегают в данном случае, состоит в создании *погасительного фонда* (*sinking fund*).

Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (обычно на отдельный счет в банке), на которые начисляются проценты. Сумма, накопленная в фонде, должна быть равна сумме возвращаемого долга. Взносы в фонд могут быть как постоянными, так и переменными во времени.

Основной вопрос при формировании погасительного фонда — определение величины годового платежа, вносимого в фонд. Здесь можно воспользоваться теорией постоянных и переменных рент, рассмотренной в разделах 2 и 3. Для простоты рассуждений рассмотрим случай постоянных платежей, вносимых в фонд в конце года.

Наиболее простой способ формирования погасительного фонда состоит в выплате постоянных ежегодных взносов R по ставке i процентов годовых на протяжении N лет. Пусть общий срок займа n лет; g — годовая ставка процентов по займу; L — продолжительность льготного периода; $n = L + N$. Поскольку фонд должен быть накоплен за N лет, взносы в фонд образуют постоянную ренту с параметрами R, N, i .

Если на протяжении всего срока займа в конце каждого года выплачиваются проценты, то срочные уплаты на протяжении льготного периода равны $Y = D \cdot g$, после окончания льготного периода $Y = Dg + D/S_{N,i}$.

Если условия займа предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то $Y = 0$ на протяжении льготного периода и $Y = D(1 + g)^n / S_{N,i}$ в периодах после окончания льготного периода.

При создании погасительного фонда используются две процентные ставки — i и g . Очевидно, что создание фонда особенно выгодно должнику тогда, когда $i > g$, так как в этом случае он получает более высокие проценты, чем выплачивает сам.

5.2. Погашение основного долга равными суммами

При значительных размерах задолженности долг обычно погашается в рассрочку частями: погашение основного долга равными суммами либо погашение всей задолженности равными или переменными срочными платежами. Рассмотрим первый способ погашения задолженности.

Пусть долг в сумме D погашается в течение n лет и в конце каждого года сумма основного долга уменьшается на одну и ту же величину $R = D/n$. Соответственно уменьшаются и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток основной задолженности. Если проценты и основной долг выплачиваются один раз в конце года, то срочная уплата Y_t в году t будет

$$Y_t = \frac{D}{n} + D \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) g, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Если долг погашается p раз в году и с той же частотой выплачиваются проценты, то можно воспользоваться формулой (1), заменив в ней n на np , а g на g/p . В этом случае t означает номер периода.

Из формулы (1) следует, что срочные уплаты в начале срока погашения выше, чем в конце этого срока, что не всегда удобно для должника.

5.3. Погашение долга равными срочными уплатами

В соответствии с этим методом расходы должника постоянны на протяжении всего срока погашения, т.е. $Y = I_t + R_t = \text{const}$, где I_t — процентные платежи, а R_t — сумма погашения основного долга в периоде t .

План погашения может быть разработан при условии, что заданы срок n погашения займа и величина Y расходов по обслуживанию долга.

При заданном сроке погашения займа в начале рассчитывается величина срочной уплаты

$$Y = \frac{D}{a_{n,g}}. \quad (2)$$

Далее эта величина "расщепляется" на процентные платежи I_t и сумму погашения основного долга R_t . Можно показать [1], что

$$R_t = R_{t-1}(1+g), \quad t = 2, 3, \dots, n, \quad R_1 = Y - Dg, \quad (3)$$

т.е. происходит рост в геометрической прогрессии погашения основного долга. В связи с этим данный метод часто называют **прогрессивным** методом погашения задолженности.

Используя формулу (3), легко определить сумму погашенной задолженности W_t на конец года t :

$$W_t = R_1 \cdot s_{t,g}, \quad (4)$$

где $s_{t,g}$ — коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.

Из формулы (4) следует, что $D_t = D - W_{t-1}$.

Если уплата процентов и погашение долга осуществляются не один, а p раз в году, то можно воспользоваться приведенными выше формулами (2) – (4), производя в них замены: $n \rightarrow np$, $Y \rightarrow Y/p$, $g \rightarrow g/p$.

Если задана величина Y срочной уплаты, то на первом этапе разработки плана погашения долга необходимо определить срок его погашения. После того как найдено n , план погашения разрабатывается обычным образом, описанным выше. Разрешая формулу (2) относительно n , находим

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{Dg}{Y}\right)}{\ln(1 + g)}. \quad (5)$$

Из формулы (5) вытекает, что погасить задолженность можно лишь для $Y > Dg$.

Поскольку расчетное значение (5) обычно оказывается дробным числом, его округляют до ближайшего большего целого числа n_1 . В годах $1, 2, \dots, n_1 - 1$ срочные уплаты будут равны Y , а в году n_1 срочная уплата определяется из условия полного погашения долга.

Аналогичным образом разрабатывается план погашения и для случая, когда выплата процентов и погашение основного долга производятся не один, а несколько раз в году.

5.4. Погашение долга переменными срочными уплатами

При составлении планов погашения задолженности условие $Y = \text{const}$ не всегда оказывается удобным, так как размеры срочных уплат могут быть, например, связаны с поступлением денежных средств из какого-либо источника и задаваться заранее как Y_1, \dots, Y_{n-1} . Величина последней срочной упла-

ты Y_n не задается, она определяется из условия полного погашения долга в последнем периоде.

Расчет плана погашения задолженности происходит по рекуррентной схеме:

$$\begin{aligned} I_t &= D_t g, \quad R_t = Y_t - I_t, \quad t = 1, 2, \dots, n-1; \\ D_t &= D_{t-1}(1+g) - Y_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n; \quad D_1 = D. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина срочной уплаты Y_n определяется из условия: $D_{n+1} = 0$, т.е. $Y_n = D_n(1+g)$.

5.5. Планы погашения долга в потребительском кредите

Пусть потребительский кредит в размере D выдан на n под i годовых процентов. В потребительском кредите (*consumer loan*) проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. Образовавшаяся сумма долга погашается p раз в году (обычно $p = 12$) и каждый раз выплачивается сумма

$$Y = \frac{D(1+ni)}{np}. \quad (7)$$

Эта величина представляет собой срочную уплату. Однако при составлении плана погашения задолженности теперь нельзя воспользоваться результатами пункта 5.3, в котором проценты, в каждом периоде, начислялись на остаток фактической задолженности. Как же теперь расчленить Y на процентные платежи и сумму погашения основного долга? Для этого обычно применяют метод **сумм чисел**. Согласно этому методу, сумма порядковых номеров выплат равна $q = np(1+np)/2$, процентные платежи за весь срок кредита $I = Dni$, а процентные платежи I_t и сумма погашения основного долга R_t в платеже с номером t составляют:

$$I_t = \frac{(np - (t-1))I}{q}, \quad R_t = Y - I_t, \quad t=1, 2, \Lambda, np. \quad (8)$$

Определим остаток задолженности на любой промежуточный период времени кредита. Необходимость в этом может возникнуть, например, при досрочном погашении кредита. Сумма погашенного долга W_k на конец периода k , согласно формуле (8)

$$W_k = \sum_{s=1}^k R_s = Y \cdot k - \frac{I}{q} \left(npk - \frac{k(k-1)}{2} \right), \quad k=1, 2, \Lambda, np.$$

Остаток основного долга D_t на начало периода t

$$D_t = D - W_{t-1}.$$

5.6. Планирование погашения ипотечной ссуды

Ипотечная ссуда — это ссуда, выдаваемая под залог недвижимости (ипотека — слово греческого происхождения, означающее залог). При такой сделке должник передает залогодержателю право на преимущественное удовлетворение его требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся методами погашения задолженности. В данном пункте рассмотрим **стандартную**, или **типовую**, ипотечную ссуду и **ссуду с ростом платежей**.

В **стандартной ипотечной ссуде** должник погашает долг обычно ежемесячно, и с той же частотой на остаток основной задолженности начисляются проценты по ставке $g/12$, где g — годовая ставка процентов по ссуде. Поэтому при составлении плана погашения стандартной ипотечной ссуды можно воспользоваться результатами пункта 5.3, положив в них $p = 12$.

Ссуды с ростом платежей (*graduated payment mortgage*) предполагают постоянный рост месячных расходов должника в течение первых 5—10 лет. В оставшееся время погашение производится постоянными срочными упла-

тами. Такая схема платежей обычно приводит к эффекту **отрицательной амортизации**, когда в течение первых месяцев основной долг не убывает, а наоборот возрастает.

Разделим весь срок в N месяцев погашения ссуды с ростом платежей на два интервала длительностью m и n месяцев. В первом периоде расходы растут с постоянным темпом q , $q > 1$, т.е. $y_t = yq^{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, m$, где y — расходы в первом месяце. Во втором периоде расходы должника постоянны: $y_t = yq^{m-1}$, $t > m$.

Если ссуда выдана под i годовых процентов, то согласно [1]

$$y = D: \left[\frac{v(qv)^m - v}{qv - 1} + q^{m-1}v^{m+1} \frac{v^n - 1}{v - 1} \right], \quad (9)$$

$$v = \left(1 + \frac{i}{12} \right)^{-1}.$$

Формула (9) определяет расходы должника y_t , $t = 1, 2, \dots, N$. При составлении плана погашения задолженности срочные уплаты стандартным образом распределяются на выплату процентов и сумму погашения основного долга.

5.7. Льготные займы и кредиты

В ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются на льготных условиях. Низкая процентная ставка льготного займа (в сочетании с большим его сроком и льготным периодом) дает должнику существенную выгоду, а заимодавец несет условную потерю.

Условная потеря W заимодавца измеряется **грант-элементом**, определяемым как разность между номинальной суммой займа D и современной величиной погасительных платежей и выплаченных процентов.

Основная проблема при вычислении грант-элемента — выбор надлежащей ставки процентов i для расчета современной величины платежей.

Обычно в качестве такой ставки i выбирают преобладающую на рынке капиталов долгосрочную ставку процентов.

Пусть заем выдан на n лет, с льготным периодом L (если такой имеется), и предусматривает погашение долга равными срочными платежами постнумерандо, проценты выплачиваются по ставке g . На денежном рынке доминирующей является ставка процентов i .

Если предусмотрен льготный период, в течение которого выплачиваются проценты в конце каждого года, то согласно [1]

$$W = D - D \left(\frac{a_{n-L,i}}{a_{n-L,g}} (1+i)^{-L} + g a_{L,i} \right). \quad (10)$$

Если в льготном периоде проценты не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме долга, то согласно [1]

$$W = D - D \frac{a_{n-L,i}}{a_{n-L,g}} \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^L. \quad (11)$$

Грант-элемент для беспроцентных займов ($g=0$) можно вычислить по формулам (10), (11), если учесть, что $a_{n,0} = n$.

5.8. Задачи и примеры к разделу 5

5.1. Кредит в сумме 100 тыс. \$ выдан на 6 лет под 8% годовых и предусматривает погашение долга разовым платежом в конце срока кредита вместе с начисленными процентами. Для погашения долга год спустя начал создаваться погасительный фонд путем равных годовых взносов под 8,2% годовых. Определить, на сколько уменьшатся суммарные взносы в фонд, если взносы в фонд будут поступать не ежегодно, а ежемесячно. Расчеты произведите для платежей: а) постнумерандо; б) пренумерандо.

5.2. В условиях предыдущей задачи проценты по кредиту периодически выплачиваются в конце каждого года. Определить суммарные расходы должника по обслуживанию долга, если а) погасительный фонд создается го-

довыми платежами постнумерандо, б) погасительный фонд создается месячными платежами пренумерандо.

5.3. Платежи в фонд (в условиях задачи 5.1) изменяются по геометрической прогрессии и вносятся в конце года. Определить суммарные расходы должника по обслуживанию долга, если: а) платежи с каждым годом увеличиваются на 10%; б) убывают на 10%.

5.4. В каком случае, в условиях задачи 5.1, суммарные расходы должника будут больше и на сколько, если: а) платежи в фонд годовые, постнумерандо, образуют возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателями 1,1; б) платежи постнумерандо в фонд образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью 20 тыс. \$?

5.5. В условиях задачи 5.1 взносы в погасительный фонд — годовые, постнумерандо. Взносы в фонд в конце третьего года не были сделаны по какой-то причине. Для того чтобы погасить "недоплату", решено, начиная с конца четвертого года, увеличивать последующие выплаты в q раз. Чему должно быть равно значение q ?

5.6. Проценты по кредиту (в условиях задачи 5.1) периодически выплачиваются в конце года. Взносы в погасительный фонд намечено производить годовыми платежами постнумерандо. Однако после двух выплат в погасительный фонд последующие платежи стали снижаться на 5 тыс. \$ в год. Чему должен равняться последний взнос в погасительный фонд, чтобы долг был полностью погашен?

5.7. Проценты по кредиту периодически выплачиваются в конце года при сохранении условий задачи 5.1. Однако какой будет ставка процентов в погасительном фонде через год, точно не известно. Считая, что ставка процентов в погасительном фонде примет значение 8,1% с вероятностью 0,1; 8,2% с вероятностью 0,8 и 8,3% с вероятностью 0,1, вычислить среднее значение и дисперсию расходов должника. Платежи в фонд поступают в конце года.

5.8. Заем в сумме 185 тыс. \$ выдан на 5 лет под 7,3% годовых. Предполагается погашение основного долга по займу равными годовыми платежами постнумерандо. На сколько уменьшится суммарная выплата процентов, если перейти к: а) поквартальному погашению; б) ежемесячному погашению основного долга.

5.9. В условиях предыдущей задачи долг намечено гасить равными суммами. В конце четвертого года должник решил погасить задолженность разовым платежом. Какую сумму он должен уплатить?

5.10. Кредит в сумме 273 тыс. \$ выдан на 7 лет под 9,2% годовых и предусматривает погашение основного долга равными суммами, выплачиваемыми вместе с процентами в конце каждого полугодия. Намеченные к погашению восьмой и девятый платежи не были сделаны по каким-то причинам. В дальнейшем график выплат был восстановлен, но при этом пришлось увеличить равные выплаты, идущие в счет погашения основного долга. На сколько пришлось увеличить разовые выплаты по погашению основного долга?

5.11. Три с половиной года платежи погашались по намеченному графику в условиях предыдущей задачи. Затем было решено оставшуюся задолженность погасить равными платежами S_0 в конце пятого и седьмого годов. Чему равно значение S_0 ?

5.12. Кредит в сумме 261,5 тыс. \$ выдан на 6 лет под 9,25% годовых и предусматривает погашение долга равными срочными уплатами постнумерандо в конце каждого года. Возрастут или уменьшатся (и на сколько) суммарные расходы должника по обслуживанию долга, если перейти к погашению основного долга равными суммами?

5.13. Решено погасить долг равными срочными платежами постнумерандо в конце каждого года (см. условия предыдущей задачи). После 3 лет погашения задолженности, согласно намеченному графику, было решено в течение последующих трех лет гасить основную задолженность равными по-

лугодовыми платежами. Чему будут равны суммарные расходы должника по обслуживанию долга?

5.14. В условиях задачи 5.12 должник после 3 лет погашения задолженности по намеченному графику решил погасить всю оставшуюся задолженность разовым платежом в конце четвертого года. Какую сумму он должен выплатить?

5.15. Кредит в сумме 315,82 тыс. \$ выдан на 7 лет под 9,8% годовых. В счет погашения долга необходимо в конце первого года уплатить 40 тыс. \$, в конце второго — 50 тыс. \$, а остальной долг погашается равными годовыми выплатами постнумерандо. Чему равны суммарные расходы должника по обслуживанию долга за весь срок ссуды?

5.16. В условиях предыдущей задачи остальной долг должник должен погасить равными срочными уплатами, начиная с конца третьего года. Чему будут равны суммарные расходы должника по обслуживанию всего долга?

5.17. В условиях задачи 5.15, начиная с конца третьего года, должник обязуется погасить остаток задолженности срочными платежами, изменяющимися по геометрической прогрессии. В каком случае и на сколько суммарные расходы должника будут больше, если срочные уплаты образуют: а) возрастающую прогрессию со знаменателем $q = 1,1$; б) убывающую прогрессию со знаменателем $q = 0,85$? Первые два платежа должник обязуется заплатить в таких же размерах, как и в задаче 5.15.

5.18. Кредит выдан на условиях, оговоренных в задаче 5.15. В каком случае суммарная выплата процентов по долгу будет меньше и на сколько, если долг гасится срочными уплатами, образующими: а) геометрическую прогрессию со знаменателем 1,1; б) убывающую арифметическую прогрессию с разностью 10 тыс. \$? Выплаты по погашению долга годовые, постнумерандо.

5.19. Кредит в сумме 784 тыс. \$ выдан на 9 лет под 9,8% годовых и предусматривает погашение долга равными срочными годовыми платежами

постнумерандо. Должник после 3 лет оплаты долга по намеченному графику решил погасить оставшуюся задолженность тремя равными суммами S_0 в конце пятого, седьмого и девятого годов. Чему равно значение S_0 ?

5.20. Кредит в условиях предыдущей задачи в течение первых 3 лет погашался равными срочными годовыми платежами постнумерандо, а в оставшийся период — равными годовыми суммами по погашению основного долга, которые выплачивались в конце года. Чему равна суммарная выплата процентов по долгу?

5.21. В задаче 5.19 кредит намечено погашать равными годовыми срочными уплатами. На сколько уменьшится суммарная выплата процентов, если перейти от платежей постнумерандо к платежам пренумерандо?

5.22. В задаче 5.19 кредит планируется погашать равными годовыми срочными уплатами постнумерандо, причем первая выплата будет осуществлена через 2 года после получения кредита. За год отсрочки платежей проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга. Чему будет равна суммарная выплата процентов по долгу?

5.23. Кредит в сумме 378,55 тыс. \$ выдан на пять с половиной лет под 8,6% годовых. Планируется погашать его равными суммами, идущими на погашение основного долга. Выплаты по займу годовые постнумерандо, причем первая выплата будет произведена через полтора года после получения займа. Чему будет равна суммарная выплата процентов по кредиту, если за полгода отсрочки платежей проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

5.24. Кредит (с условиями погашения из предыдущей задачи) намечено погашать срочными, годовыми уплатами постнумерандо, изменяющимися по геометрической прогрессии. Чему будет равна суммарная выплата процентов по долгу, если: а) знаменатель прогрессии равен 1,1; б) знаменатель прогрессии равен 0,9?

5.25. Кредит выдан на условиях, описанных в задаче 5.23. В каком случае расходы должника по обслуживанию долга будут меньше и на сколько, если срочные годовые расходы постнумерандо: а) возрастают в геометрической прогрессии со знаменателем 1,1; б) убывают по арифметической прогрессии с разностью 10 тыс. \$?

5.26. Кредит (см. условия задачи 5.23) погашается тремя нерегулярными платежами: первый платеж — в конце второго года в размере 50 тыс. \$; второй платеж — в конце четвертого года в размере 100 тыс. \$ и последний платеж — в конце срока ссуды. Погасительные платежи прежде всего идут на погашение основного долга, затем на выплату процентов. Какая сумма из последнего платежа пойдет на погашение основного долга?

5.27. Долг в сумме 400 тыс. \$ выдан на 6 лет под 9,25% годовых и предусматривает погашение его тремя нерегулярными платежами: $S_1 = 50$ тыс. \$ в конце второго года; $S_3 = 100$ тыс. \$ в конце шестого года и второй платеж S_2 в конце четвертого с половиной года. Определите, какая сумма из платежа S_3 пойдет на выплату процентов? Погасительные платежи прежде всего идут на погашение основного долга.

5.28. Потребительский кредит в сумме 10 тыс. \$ выдан на 3 года под 10 простых годовых процентов. Погашение долга ежемесячное, согласно методу сумм чисел. Клиент, оплатив предыдущие платежи, решил погасить задолженность разовым платежом в конце 15-го месяца. Какую сумму он должен выплатить?

5.29. В предыдущей задаче погашение процентов равномерное на протяжении всего срока кредита. Какова сумма разового платежа в конце 15-го месяца? На сколько меньше эта сумма аналогичной величины из предыдущей задачи?

5.30. Для строительства жилья предоставлена стандартная ипотечная ссуда в размере 380 млн руб. под 10% годовых на 20 лет. Погашение долга

ежемесячное. Должник решил погасить задолженность в конце десятого года разовым платежом. Какую сумму он должен уплатить?

5.31. В условиях предыдущей задачи ипотечная ссуда предусматривает рост платежей в течение 5 лет с ежегодным приростом в 5%. Во втором периоде, длительностью 180 месяцев, платежи постоянны. Определите максимальную сумму D_{max} основной задолженности и задолженность D_{239} на начало 239-го месяца.

5.32. Льготный заем в сумме 100 млн \$ выдан на 5 лет под 6% годовых и предусматривает льготный период в 7 месяцев, в течение которых ежемесячно выплачиваются проценты. На финансовом рынке для такого срока кредита преобладающей ставкой процентов является ставка в 9% годовых. После окончания льготного периода заем должен гаситься равными месячными срочными платежами постнумерандо. Чему равна условная потеря W заимодавца?

5.33. Решите предыдущую задачу при условии, что в течение льготного периода проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме основного долга.

5.34. Условия получения и погашения льготного займа такие, как и в примере 5.32. На сколько уменьшится условная потеря заимодавца, если погашение кредита начнется сразу же, без льготного периода?

5.35. Беспроцентный заем в сумме 2 млн \$ выдан на 2 года и предусматривает погашение долга в конце каждого месяца равными суммами. На финансовом рынке для такой суммы и такого срока займа доминирующей ставкой процентов является ставка в 8% годовых. На сколько возрастет условная потеря заимодавца, если он предоставит льготный период в 6 месяцев?

5.36. Льготный заем в 85 млн \$ выдан на 6 лет под 7% годовых и предусматривает погашение его срочными годовыми платежами постнумерандо. На кредитном рынке для таких сумм и сроков предоставления доминирую-

щей ставкой является ставка в 9,5% годовых. Вычислите: а) условную потерю заимодавца W_1 , если погашение ведется срочными платежами возрастающими в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1,1$; б) условную потерю заимодавца W_2 , если погашение задолженности ведется срочными платежами, убывающими в арифметической прогрессии на 1 млн \$ в год.

5.37. Льготный заем в сумме 750 тыс. \$ выдан на 7 лет под 5% годовых. Доминирующей ставкой на денежном рынке является ставка в 9,8% годовых. Долг погашается нерегулярными платежами: 200 тыс. \$ в конце второго года; 300 тыс. \$ в конце четвертого года, а остальная сумма выплачивается в конце кредита. Определите условную потерю W заимодавца.

6. Анализ эффективности финансовых операций

Доходы от финансово-кредитных операций имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей и т.д. В одной финансовой операции часто предусматривают два, а то и три источника дохода. Например, ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные. В связи с тем что источников дохода может быть несколько, возникает проблема измерения эффективности (доходности) финансовой операции с учетом всех источников дохода.

6.1. Чистый приведенный доход и внутренняя норма доходности финансовой операции. Уравнение баланса финансовой операции

Степень финансовой эффективности (доходности) операций, имеющих несколько источников дохода, обычно измеряется в виде годовой ставки сложных процентов.

Расчетная ставка процентов, измеряющая степень доходности, получила разные названия. Эту ставку называют *эффективной, полной доходностью* (в русскоязычной литературе), *внутренней нормой доходности* (в англоязычной литературе). Эту ставку будем называть внутренней нормой доходности и обозначать *IRR (internal rate of return)*.

Под внутренней нормой доходности будем понимать ту расчетную ставку сложных процентов *IRR*, при которой начисление процентов на инвестиции обеспечит выплату всех предусмотренных платежей.

Чем выше внутренняя норма доходности, тем эффективнее для инвестора финансовая операция. При неблагоприятных условиях IRR может быть нулевой или даже отрицательной величиной.

Для того чтобы сформулировать расчетные процедуры вычисления IRR , нам понадобится понятие **чистой приведенной величины** дохода, которое будет сформулировано ниже.

Финансовая операция может предусматривать неоднократные и разновременные переходы денежных сумм от одного владельца к другому. Рассматривая поток платежей с позиции одного из них, будем считать все поступления R_j в момент времени t_j , $j = 1, 2, \dots, m$, положительными величинами, а все его выплаты I_s в момент времени τ_s , $s = 1, 2, \dots, k$, — отрицательными.

Тогда величина

$$NPV = \sum_{j=1}^m R_j(1+i)^{-t_j} - \sum_{s=1}^k I_s(1+i)^{-\tau_s} \quad (1)$$

называется **чистой приведенной величиной** дохода (*net present value*) по ставке сравнения i , т.е. формула (1) определяет современную величину потока платежей с учетом их знака.

Требование положительности NPV является обязательным при принятии решения о реализации финансовой операции кредитором.

Если NPV финансовой операции положительна, то такая операция в целом эффективна. Однако NPV не определяет степень эффективности финансовой операции. Эту роль выполняет IRR , определяемая как значение сложной ставки процентов, при которой значение NPV равно нулю. Таким образом, IRR — это корень уравнения:

$$NPV(IRR) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется **уравнением баланса** финансовой операции.

6.2. Вычисление эффективности простейших финансовых операций

В этом разделе рассматривается доходность таких простейших операций, как выдача ссуд под простые и сложные проценты, и учетных операций. В этих операциях, кроме начисления процентов, предусмотрен другой источник — удержание комиссионных. В конце раздела рассматривается доходность операций купли–продажи векселей.

Пусть ссуда в размере D выдана на n под i годовых процентов и предусматривает погашение долга разовым платежом. При ее выдаче удержаны комиссионные за операцию в размере G , т.е. фактически выданная ссуда составляет значение $D - G$.

Если ссуда предусматривает начисление простых процентов, то из уравнения баланса (2) этой финансовой операции получаем

$$IRR = \left[\frac{D(1 + ni)}{D - G} \right]^{1/n_1} - 1,$$

где $n = \frac{t}{K}$, $K = 360, 365(366)$; $n_1 = \frac{t}{K_1}$, $K_1 = 365(366)$, а t — количество дней, на которые предоставлена ссуда.

Если ссуда выдается под сложные проценты, то

$$IRR = \left[\frac{D}{D - G} \right]^{1/n_1} (1 + i) - 1.$$

Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке и, кроме того, удерживаются комиссионные в размере G , то

$$IRR = \left[\frac{D}{D(1 - nd) - G} \right]^{1/n_1} - 1,$$

где $n = \frac{t}{360}$, а t — количество дней, за которые удерживаются проценты.

Если вексель через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить в виде IRR .

Пусть номинал векселя равен S и он куплен по цене P_1 (по учетной ставке d_1) за t_1 дней до наступления срока погашения векселя. За t_2 дней до погашения вексель был продан по цене P_2 с дисконтированием по ставке d_2 .

Разрешая уравнение (2) баланса данной финансовой операции относительно IRR , получаем

$$IRR = \left[\frac{P_2}{P_1} \right]^{\frac{K_1}{t_1 - t_2}} - 1. \quad (3)$$

Так как $P_i = S \left(1 - \frac{t_i d_i}{360} \right)$, $i=1,2$, то, подставив эти значения в формулу (3), получаем

$$IRR = \left[\frac{360 - t_2 d_2}{360 - t_1 d_1} \right]^{\frac{K_1}{t_1 - t_2}} - 1. \quad (4)$$

Формула (4) выражает эффективность купли-продажи векселя через значения учетных ставок на момент покупки и продажи векселя.

6.3. Эффективность потребительского кредита

Погасительные платежи в потребительском кредите представляют собой p -срочную ренту с разовым платежом в размере Y , определяемом по формуле (7) из пункта 5.5

Уравнение баланса (2) потребительского кредита будет иметь вид

$$-D + pYa_{n,i}^{(p)} = 0, \quad i = IRR \quad (5)$$

Из формулы (5) получаем

$$\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p[(1 + i)^{1/p} - 1]} = \frac{n}{1 + ni}. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно решить только численно относительно i_1 одним из приближенных методов.

Значение i_1 оказывается значительно больше объявленной ставки i , так как сумма основного долга с течением времени убывает, а проценты уплачены вперед.

6.4. Эффективность погашения долгосрочных ссуд

Способ погашения долгосрочной задолженности (разовым платежом, равными суммами, равными срочными уплатами и т.д.) оказывает заметное влияние на эффективность финансовой операции для кредитора. Эффективность таких финансовых операций определяется из уравнения баланса.

Поясним процесс определения эффективности для ссуд, погашаемых равными срочными уплатами.

Пусть ссуда D выдана на n лет под i годовых процентов и предусматривает льготный период длительностью L . При выдаче ссуды удерживаются комиссионные в размере G .

Если в течение льготного периода выплачиваются только проценты, то уравнение баланса (2) принимает вид:

$$-(D - G) + Dia_{L,i} + \frac{Da_{n-L,i}}{a_{n-L,i}}(1 + i_1)^{-L} = 0. \quad (7)$$

Если на протяжении льготного периода проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме основного долга, то уравнение баланса будет следующим:

$$-(D - G) + \frac{Da_{n-L,i}}{a_{n-L,i}} \left(\frac{1 + i}{1 + i_1} \right)^L = 0. \quad (8)$$

Внутренняя норма доходности находится как результат приближенного решения уравнений (7), (8) относительно i_1 .

6.5. Измерение эффективности инвестиционных проектов

Рассмотрим поток платежей из пункта 6.1 с позиции инвестора. Сохраним обозначения переменных, введенные в этом пункте. Тогда платежи I_s , $s = 1, 2, \dots, k$, — это те денежные вложения, которые инвестор вкладывает (инвестирует) в промышленный, коммерческий или финансовый проект, а R_j , $j = 1, 2, \dots, m$, — это чистая отдача (доход) от вложенных средств. В инвестиционных проектах отдачи обычно следуют после завершения инвестиций (либо часть из них получают до завершения инвестиций).

Планируя вложить денежные средства в некоторый проект, инвестор обычно рассматривает несколько вариантов инвестирования средств и получения доходов от них. При этом его интересуют показатели, характеризующие степень доходности вложения денежных средств. Наиболее распространенными среди таких показателей являются: *чистая приведенная величина* дохода (NPV); *внутренняя норма доходности* (IRR); *срок окупаемости* (*payback method*) инвестиций и *рентабельность* (*profitability index*).

Первые два показателя: NPV , IRR , были введены в пункте 6.1 для потока платежей. Для инвестиционных проектов они вычисляются точно таким же образом. Рассмотрим два оставшихся показателя.

Срок окупаемости — один из наиболее часто применяемых показателей эффективности инвестиций. Различают *не дисконтированный*, или *упрощенный*, *срок окупаемости* n_y и *дисконтированный срок окупаемости* $n_{ок}$.

Упрощенный срок окупаемости не учитывает фактор времени. Пусть B — суммарные инвестиции, т.е. $B = I_1 + \dots + I_k$. Введем суммы $S_\lambda = \sum_{j=1}^{\lambda} R_j$, причем $S_\lambda \leq B < S_{\lambda+1}$. Тогда

$$n_y = t_\lambda - \tau_k + \frac{B - S_\lambda}{R_{\lambda+1}} (t_{\lambda+1} - t_\lambda). \quad (9)$$

Упрощенный срок окупаемости (9) показывает, через какой срок после окончания инвестиций τ_k отдачи окупят суммарные вложения B . В экономически развитых странах показатель n_y применяют в основном мелкие фирмы. С финансовых позиций более обоснованным является дисконтированный срок окупаемости.

Пусть i — *ставка сравнения*, или *ставка дисконтирования*, и B_1 — наращенная сумма инвестиций на конец инвестиционного процесса, т.е.

$$B_1 = \sum_{j=1}^k T_j (1+i)^{\tau_k - \tau_j}.$$

Аналогично, определим суммы $S_\lambda = \sum_{j=1}^\lambda R_j (1+i)^{-(t_j - \tau_k)}$, и пусть выполняются неравенства: $S_\lambda \leq B_1 < S_{\lambda+1}$. Тогда

$$n_{ок} = t_\lambda - \tau_k + \frac{(B_1 - S_\lambda)(t_{\lambda+1} - t_\lambda)}{R_{\lambda+1}(1+i)^{-(t_{\lambda+1} - \tau_k)}}.$$

Основной недостаток срока окупаемости как меры эффективности инвестиций состоит в том, что он не учитывает весь период функционирования отдачи и, следовательно, на него не влияют все те отдачи, которые лежат за пределами срока окупаемости. Поэтому срок окупаемости обычно используется лишь в виде ограничения при принятии решения: если срок окупаемости проекта больше, чем принятое ограничение, то он исключается из списка возможных инвестиционных проектов.

Определим *рентабельность* как отношение приведенных доходов к приведенным на ту же дату инвестиционным расходам и будем обозначать его как PI :

$$PI = \frac{\sum_{j=1}^m R_j (1+i)^{-t_j}}{\sum_{j=1}^k I_j (1+i)^{-\tau_j}}.$$

Если $PI = 1$, то это означает, что доходность капиталовложений точно соответствует нормативу рентабельности i и в этом случае $i = IRR$. При $PI < 1$

инвестиции нерентабельны, так как не обеспечивают заданный норматив i . При $PI > 1$ инвестиции рентабельны.

В приведенных показателях эффективности инвестиций участвуют отдачи $R_j, j = 1, 2, \dots, m$. Однако они не всегда являются детерминированными величинами, поскольку предсказать точное их значение не всегда представляется возможным. В этом случае отдачи можно рассматривать как случайные величины с заданным или спрогнозированным законом распределения. Но тогда и показатели эффективности инвестиций будут случайными величинами и в этом случае надо оценить их среднее ожидаемое значение и дисперсию, или риск [9].

6.6. Задачи и примеры к разделу 6

6.1. Ссуда в размере 380 млн руб. выдана на квартал (четверть года) под 36 годовых простых процентов. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 5% от суммы ссуды. Определите внутреннюю норму доходности для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов, если ссуда погашается разовым платежом.

6.2. Ссуда в условиях задачи 6.1 не была погашена вовремя. Должник попросил отсрочку для выплаты долга еще на 3 месяца. Кредитор согласился дать отсрочку при условии, что на накопившуюся задолженность в оставшийся период времени будут начисляться 40% годовых. Определите IRR для кредитора в этих условиях, если схема начисления простых процентов не изменилась.

6.3. В условиях задачи 6.1 должник в намеченный срок вернул только 40% от суммы долга. Остальная сумма долга была пролонгирована еще на три месяца под 40% годовых по той же схеме простых процентов. Определите IRR для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов.

6.4. Кредит в сумме 420 млн руб. выдан на два года под 40 годовых сложных процентов и предусматривает разовое погашение долга. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,1% от суммы кредита. Определите IRR для кредитора.

6.5. По условиям задачи 6.4 кредит не был погашен в оговоренный срок. Должник попросил отсрочку с выплатой долга на полгода. Кредитор согласился с этой просьбой при условии, что на накопившуюся задолженность будут начисляться 45% годовых сложных процентов. Какова IRR для кредитора в этих условиях?

6.6. Должник (в тех же условиях, что и в задаче 6.4) смог оплатить в оговоренный срок лишь 50% от суммы долга. Оставшаяся задолженность должна быть оплачена через полгода при начислении на нее 45% годовых (простые проценты). Определите, чему будет равно значение IRR для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов. Расчет проведите с точностью до 0,5%.

6.7. Вексель в сумме 61,5 тыс. \$ погашается 31.12. Владелец векселя решил учесть его в банке 30.06. Банк учитывает векселя с таким сроком погашения по учетной ставке 8,5% годовых и за операцию учета удерживает 0,1% от суммы векселя. Чему равна внутренняя норма доходности для банка от такой операции учета?

6.8. Владелец векселя может учесть его в банке А либо в банке В. Атрибуты векселя и условия его учета в банке А описаны в предыдущей задаче. Банк В учитывает тот же вексель по учетной ставке 8% годовых, но за операцию учета берет 0,15% от суммы векселя. Какой банк предпочтет векселедержатель?

6.9. Всероссийский биржевой банк (ВББ) выпустил 31 декабря 1991 г. депозитный сертификат достоинством 5 тыс. руб. с условиями: опцион на право покупки 50 руб.; сертификаты принимаются к оплате ВББ по номиналу до 30 декабря 1996 г. и по двойному номиналу с 31 декабря 1996 г. Опреде-

лите доходность вложения денежных средств в такой сертификат в виде годовой ставки сложных процентов, если сертификат возвращается к оплате в ВББ: а) через 4,5 года; б) через 5 лет.

6.10. Вексель куплен по цене 180\$ за 137 дней до его погашения. Через 62 дня его реализовали по цене 190\$. Оценит в виде годовой ставки простых процентов доходность купли-продажи векселя. Временная база для начисления простых процентов $K = 365$ дней.

6.11. Вексель, выданный на сумму 182,4 тыс. \$ с уплатой 30.10, был куплен за 180 тыс. \$ 17.03. Затем владелец векселя учел его в банке по учетной ставке 3,2% 05.10. За операцию учета банк удержал 0,1% суммы векселя в виде комиссионных. Чему равна доходность купли-продажи векселя в виде годовой ставки простых процентов? Временная база учета $K = 360$, начисления простых процентов — 365 дней.

6.12. На депозит 17.03 положено 25,3 тыс. \$ под 8,7 простых годовых процентов сроком до 18.09 включительно. Двадцать второго июля этот депозит был продан новому владельцу за 25,5 тыс. \$. Определите доходность и инвестирование средств в депозит для нового владельца в виде годовой ставки простых процентов, $K = 365$ дней.

6.13. Потребительский кредит в сумме 8520\$ выдан на три года под 9,6% годовых (простые проценты). Вычислите действительную эффективность i_e этого кредита, если погашение задолженности: а) поквартальное; б) полугодовое. Вычисление произведите с точностью до 0,1%, платежи по кредиту — постнумерандо.

6.14. Потребительский кредит выдан на три года под 8 простых годовых процентов и предусматривает погашение поквартальное, равными платежами постнумерандо. Первая выплата — через полгода после получения кредита. Чему равно значение IRR в виде квартальной ставки сложных процентов для этого кредита? Вычисления произведите с точностью до 0,1%.

6.15. Облигация с номиналом в 1 тыс. \$ и сроком на 4 года, проценты по которой выплачиваются раз в конце года по норме 7,9%, куплена за 970\$. Определите *IRR* инвестирования средств в эту облигацию? Вычисление проведите с точностью до 0,1%.

6.16. В условиях задачи 6.15 проценты по облигации выплачиваются в конце каждого полугодия. Определите *IRR* инвестирования средств в эту облигацию. Вычисление проведите с точностью до 0,05%.

6.17. Долгосрочный кредит в сумме 120 тыс. \$ предоставлен на 10,5 лет под 9,8% годовых и предусматривает погашение долга равными годовыми суммами, идущими на погашение основного долга, выплаты — постнумерандо. Должнику предоставлен полугодовой льготный период, в течение которого проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга. При оформлении ссуды удержаны комиссионные в размере 0,1% от суммы кредита. Определите *IRR* для кредита в виде годовой ставки сложных процентов.

6.18. На сколько увеличится *IRR* в условиях задачи 6.17, если комиссионные будут удерживаться в размере 0,5% от суммы кредита.

6.19. Предусматривается погашение кредита из задачи 6.17 равными срочными уплатами, остальные условия не меняются. Определите *IRR* для кредитора в этих условиях.

6.20. Портфель облигаций, приобретенный за 415 тыс. \$, содержит облигации трех типов: А, В, С. Облигаций типа А куплено 1000 по цене 95\$ за облигацию. Номинал облигации — 100\$, срок — 5 лет, купонный доход — 8% годовых, выплачиваемых в конце каждого года. Облигаций типа В куплено 1000 по цене 120\$ за облигацию. Облигации этого типа имеют номинал 200\$, срок — 8 лет. Купонный доход по этим облигациям не предусмотрен. Облигаций типа С приобретено 2000 по цене 100\$ за облигацию. Номинал облигации — 100\$, срок — 4 года, купонный доход — 9% годовых, выплачиваемых в конце каждого полугодия. Определите внутреннюю норму доход-

ности (полную доходность) инвестирования средств в данный портфель в виде годовой ставки сложных процентов.

6.21. В инвестиционный проект вложено 100 млн \$ в конце первого года и 250 млн \$ в конце второго года. Планируется, что первая отдача от инвестиций будет получена в конце четвертого года в размере 150 млн \$. В последующие 4 года отдачи будут возрастать на 10 млн. \$ в год. Достигнув максимального значения, они сохранятся на постоянном уровне в течение 5 лет. Наконец, в последующие пять лет будет наблюдаться падение уровня отдачи на 5 млн \$ в год. Все отдачи планируется получать в конце года. При норме рентабельности в 9,8% годовых оцените показатели эффективности этого инвестиционного проекта.

6.22. Отдачи от инвестиций из предыдущей задачи могут отклоняться от планируемых значений на 1% в положительную либо отрицательную сторону. Считая, что эти отклонения являются независимыми равномерно распределенными случайными вычислениями, по 100 реализациям наборов отдачи оцените значение показателей эффективности инвестиционного проекта.